Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VIII разред

1. Одреди реалан број m ($m \neq \frac{1}{2}$, $m \neq -2$) тако да график линеарне функције
$$(m+2)x+(1-2m)y+2=0$$
на координатним осама одсеца одсечке једнаких дужина.

2. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од $60°$. Одреди x, ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.

3. На шаховском турниру је учествовало 15 играча. Сваки играч је одиграо по један меч са сваким од противника. За сваку победу су добили 3 бода, за нерешен резултат 1 бод, а за пораз 0 бодова. На крају турнира се испоставило да је било 30 нерешених мечева и да су два најбоље пласирана играча имала укупно петину свих освојених бодова. Да ли је могуће да су та два играча имала исти број бодова? Образложи одговор.

4. На колико начина се слова речи ТОПОЛОГ могу разместити тако да никада два иста слова нису једно поред другог?

5. Докажи да не постоји правоугли троугао чије су катете природни бројеви, а дужина хипотенузе $\sqrt{20222023}$ cm.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 56-3**) *I начин*. Одредимо тачку A у којој график дате линеарне функције пресеца x-осу. Из услова $y = 0$, добијамо да је $x=-\dfrac{2}{m+2}$, па је $A\left(-\dfrac{2}{m+2},0\right)$ [**4 бода**]. Тачку B у којој график дате линеарне функције пресеца y-осу одређујемо из услова $x = 0$. Тада је $y=-\dfrac{2}{1-2m}$, па је $B\left(0,-\dfrac{2}{1-2m}\right)$ [**4 бода**]. График дате линеарне функције одсеца на координатним осама одсечке једнаких дужина ако је $\left|-\dfrac{2}{m+2}\right|=\left|-\dfrac{2}{1-2m}\right|$, тј. $\left|\dfrac{m+2}{1-2m}\right|=1$ [**4 бода**].

Разликујемо два случаја:

1) Ако је $\dfrac{m+2}{1-2m}=1$, добијамо да је $m=-\dfrac{1}{3}$ [**4 бода**].

2) Ако је $\dfrac{m+2}{1-2m}=-1$, добијамо да је $m = 3$ [**4 бода**].

II начин. Једначину наведене линеарне функције можемо записати у облику $y=\dfrac{m+2}{2m-1}x+\dfrac{2}{2m-1}$ [**4 бода**]. Дакле, коефицијент правца је $k=\dfrac{m+2}{2m-1}$ [**4 бода**]. График дате линеарне функције одсеца на координатним осама одсечке једнаких дужина ако је $k = 1$ [**2 бода**] или $k = -1$ [**2 бода**]. Као у првом начину, долазимо до решења $m=-\dfrac{1}{3}$ [**4 бода**] или $m = 3$ [**4 бода**].

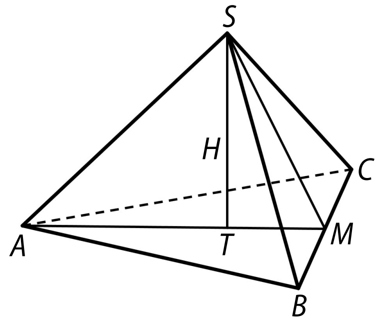
2. Угао између бочне стране и равни основе је угао између висине бочне стране и одговарајуће висине основе пирамиде, односно једнак је углу SMT, где је $ST = H$ висина пирамиде, а тачка T је тежиште основе пирамиде. Како је $\measuredangle MST = 30°$, то је $SM=2\cdot TM=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{2}\sqrt{3}=\dfrac{x}{3}\sqrt{3}$ [**4 бода**] и $H^2 = SM^2 - TM^2 = \dfrac{x^2}{4}$, па је $H=\dfrac{x}{2}$ [**4 бода**]. Површина пирамиде једнака је

$$P=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}\ [\textbf{5 бодова}],$$

док је запремина једнака

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^3\sqrt{3}}{24}\ [\textbf{5 бодова}].$$

Из услова једнакости мерних бројева површине и запремине добијамо да је $x = 18$ [**2 бода**].



3. На турниру је укупно одиграно $\dfrac{15\cdot 14}{2}=105$ мечева [**2 бода**]. У сваком мечу где имамо победника, укупан број бодова се повећа за 3 (победник освоји 3, а поражени 0 бодова) [**2 бода**]. У сваком мечу где имамо нерешен резултат, укупан број бодова се повећа за 2 (оба играча освоје по 1 бод) [**2 бода**]. Како је било 30 нерешених мечева, то је 105 – 30 = 75 мечева завршено победом неког играча. Дакле, укупан број освојених бодова на турниру је 75 · 3 + 30 · 2 = 285 [**6 бодова**]. Два најбоље пласирана играча су онда освојила укупно 57 бодова [**2 бода**]. Ако би они освојили исти број бодова, укупан број бодова који су та два играча освојила морао би да буде паран. Како је 57 непаран број, то није могуће да су два најбоље пласирана играча освојила исти број бодова [**6 бодова**].

4. *I начин*. У речи ТОПОЛОГ имамо три слова О која је потребно разместити међу преостала четири слова (Т, П, Л, Г) на неко од пет назначених места (__):

$$\_\_*\_\_*\_\_*\_\_*\_\_$$

где * означава неко од слова Т, П, Л или Г без могућности понављања [**4 бода**]. Слова Т, П, Л и Г можемо распоредити на 24 начина (за одабир првог слова постоје 4 могућности, за одабир другог слова 3, трећег 2 и четвртог 1, укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$) [**6 бодова**]. Од назначених 5 места бирамо 3 за слова О што се може урадити на 10 начина (могуће позиције су: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345) [**8 бодова**]. Закључујемо да се слова речи ТОПОЛОГ могу распоредити у траженом облику на $24 \cdot 10 = 240$ начина [**2 бода**].

II начин. У речи ТОПОЛОГ имамо три слова О, па преостала четири слова (Т,П,Л,Г) можемо сместити на неко од четири назначена места:

$$\_\_\,О\,\_\_\,О\,\_\_\,О\,\_\_\,,$$

при чему се на цртици може налазити и више слова. На првој и последњој цртици се не мора налазити ниједно слово, а на средње две се мора налазити бар по једно слово [**2 бода**]. Распореда код којих се на сваком месту налази тачно једно слово је $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ [**4 бода**] (за одабир првог слова постоје 4 могућности, за одабир другог слова 3, трећег 2 и четвртог 1). Уколико се два слова налазе на првом или четвртом месту, онда на другом и трећем морамо имати по тачно једно слово (опције су **О*О*О или О*О*О**), те у овом случају имамо $2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 48$ распореда [**5 бодова**]. Уколико се на другом или трећем месту појављује више од једног слова, онда имамо следеће опције *О**О*О, О**О*О*, *О*О**О, О*О**О*, О**О**О, О***О*О, О*О***О. Таквих распореда је $7 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 168$ [**7 бодова**]. Дакле, укупно имамо $24 + 48 + 168 = 240$ начина за распоређивање слова речи ТОПОЛОГ при чему се два иста слова никада не налазе једно до другог [**2 бода**].

III начин. Различитих распореда слова речи ТОПОЛОГ има $\frac{7!}{3!} = 840$, јер имамо 7 слова од којих се слово О понавља три пута [**6 бодова**]. Укупан број распореда у којима се јавља ООО је $5! = 120$ (ООО посматрамо као једну групу, па заједно са 4 преостала слова распоређујемо 5 слова) [**5 бодова**]. Истим расуђивањем, број распореда слова речи ТОПОЛОГ у којима се јавља ОО, укључујући и распореде са ООО, једнак је $6! = 720$ [**5 бодова**]. Укупан број тражених распореда је онда $840 - 720 + 120 = 240$ [**4 бода**].

5. *I начин*. Ако би постојали природни бројеви a и b такви да су a, b, $\sqrt{20222023}$ странице правоуглог троугла, тј. да је $a^2 + b^2 = 20222023$, један од бројева a и b мора бити паран, а други непаран [**6 бодова**]. Нека је a паран, b непаран, па их запишимо као $a = 2k$, $k \in N$ и $b = 2p + 1$, $p \in N_0$. Тада је $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4p^2 + 4p + 1$, па је $4k^2 + 4p^2 + 4p = 20222022$ [**6 бодова**]. Сада је лева страна дељива са 4, а десна није, јер двоцифрени завршетак (22) није дељив са 4, па тражени природни бројеви a и b не постоје [**8 бодова**].

II начин. Квадрат природног броја може да се завршава цифрама 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Како се збир $a^2 + b^2$ завршава цифром 3, онда сабирци морају да се завршавају цифрама 4 и 9 [**2 бода**]. Ако се a^2 завршава цифром 4, онда a мора бити облика $10p + 2$ или $10p - 2$, тј. $10p \pm 2$ ($p \in N_0$) [**2 бода**]. Слично, ако се b^2 завршава цифром 9, онда b мора бити облика $10q + 3$ или $10q - 3$, тј. $10q \pm 3$ ($q \in N_0$) [**2 бода**]. Тада је

$$(10p \pm 2)^2 + (10q \pm 3)^2 = 20222023$$
$$100p^2 \pm 40p + 4 + 100q^2 \pm 60q + 9 = 20222023$$
$$10 \cdot (10p^2 \pm 4p + 10q^2 \pm 6q) = 20222010$$
$$10p^2 \pm 4p + 10q^2 \pm 6q = 2022201 \text{ [6 бодова]}$$

Како је вредност израза са леве стране паран број, а са десне непаран, то тражени природни бројеви a и b не постоје [**8 бодова**].