

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{16}-\sqrt{15})^2}$ [10 поена] = $(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{16}-\sqrt{15}) = \sqrt{16}-1=3$ [10 поена].

2. Означимо основну ивицу пирамиде са a , бочну ивицу са b , висину пирамиде са H и апотему са h . Из поменутог правоуглог троугла у пресеку добија се да је $b = a\sqrt{2} = 8$ cm, па је $a = 4\sqrt{2}$ cm, [6 поена]. Такође је $H = a = 4\sqrt{2}$ cm [3 поена],

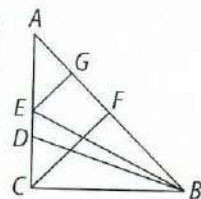
а из $h^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}a^2$ следи да је $h = \frac{a}{2}\sqrt{7} = 2\sqrt{14}$ cm [3 поена]. Запремина пирамиде је $64\sqrt{6}$ cm³ [4 поена], а површина $48(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ cm² [4 поена].

3. Означимо $|x| = a$, $|y| = b$. Једначина $20a + 19b = 2019$ има очигледно решење $a_0 = 100$, $b_0 = 1$ [3 поена], па су сва целобројна решења те једначине облика $a = 100 - 19t$, $b = 1 + 20t$, $t \in \mathbb{Z}$ [7 поена]. Због услова $a \geq 0$ и $b \geq 0$, мора бити $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, тј. постоји 6 таквих решења [5 поена]. Узимајући у обзир и могући знак бројева x , y , добијамо да је број решења дате једначине $6 \cdot 4 = 24$ [5 поена]. [Може се поћи и од неког другог посебног решења једначине $20a + 19b = 2019$, са истим коначним резултатом.]

4. Нека је G подножје нормале из тачке E на хипотенузу AB . Дуж EG је средња линија једнакокрако-правоуглог троугла AFC , где је F средиште хипотенузе AB . Троугао EGA је такође једнакокрако-правоугли, па је $EG = AG = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{4}AB$, одакле

следи да је однос катета правоуглог троугла GBE : $GB : GE = 3 : 1$.

Како и за правоугли троугао CBD важи да је $CB : CD = 3 : 1$, следи да су троуглови GBE и CBD слични, одакле следи једнакост одговарајућих углова, тј. $\sphericalangle CBD = \sphericalangle GBE = \sphericalangle ABE$ [20 поена]. [Ако ученик „наслути“ поменути сличност али је не докаже: 10 поена. Постоје и друге могућности доцртавања и избора одговарајућих сличних троуглова. Бодовање прилагодити решењу.]



5. Највећи број бодова који може једна екипа да освоји у 6 кола је 18, при чему је немогуће освојити 17 бодова (јер се са пет победа и једним нерешеним резултатом добија 16 бодова). Из услова задатка следи да су екипе освојиле 0, 1, 2, ..., 16 и 18 бодова [6 поена], што је укупно 154 бода [4 поена]. Да није било нерешених резултата, укупан број освојених бодова би био $6 \cdot 9 \cdot 3 = 162$ [6 поена]. Како у утакмици са нерешеним исходом екупе добијају укупно 2 бода (дакле, за један мање од оне у којој постоји победник), број сусрета који су завршени нерешено је био $162 - 154 = 8$ [4 поена]. [Напомена. Може се показати да се ситуација описана у задатку заиста може реализовати, али то се не тражи од ученика.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
23.03.2019.

VIII разред

1. Израчунај вредност израза

$$A = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \sqrt{9-2\sqrt{20}} + \dots + \sqrt{31-2\sqrt{240}}.$$

2. Одреди површину и запремину правилне шестостране пирамиде ако је њен највећи дијагонални пресек једнакокрако-правоугли троугао са катетом дужине 8cm.

3. Одреди број целобројних решења једначине $20|x| + 19|y| = 2019$.

4. Нека је ABC једнакокрако-правоугли троугао са правим углом код темена C , и нека су D и E тачке на катети AC такве да је $CD = \frac{1}{3}AC$ и $CE = \frac{1}{2}AC$. Докажи да је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABE$.

5. На фудбалском првенству неке државе учествује 18 екипа. У сваком колу састаје се 9 парова, победничка екипа добија 3 бода, поражена 0 бодова, а у случају нерешеног резултата обе екипе добијају по 1 бод. После 6 одиграних кола констатовано је да не постоје две екипе са истим бројем освојених бодова. Колико је било сусрета који су завршени нерешено?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.