Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

07.03.2020.

VIII разред

1. Мањи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде је једнакостранични троугао обима $18\sqrt{3}$ cm. Израчунај запремину те пирамиде.

2. За годину кажемо да је *срећна* ако су све цифре које се користе за записивање броја различите узастопне цифре. На пример, последња *срећна* година је била 2013.
а) Која је прва следећа срећна година?
б) Колико има срећних година у трећем миленијуму?

3. Израчунај запремину правилне осмостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат странице 12 cm.

4. Одреди све вредности целог броја m за које је број $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2}$ такође цео.

5. Одреди све просте бројеве p и q за које је број p^2+q^2+1 потпун квадрат.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Означимо са a основну ивицу пирамиде. Тада је краћа дијагонала правилног шестоугла $a\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{3}$, одакле је $a = 6$ cm [**5 поена**]. Висина пирамиде је $H=\sqrt{(a\sqrt{3})^2-a^2}=a\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ cm [**10 поена**], а запремина $V=108\sqrt{6}$ cm^3 [**5 поена**].

2. а) 2031 [**5 поена**]; б) У запису срећне године трећег миленијума могући су следећи избори цифара: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4 или 2, 3, 4, 5 [**4 поена**]. При томе је цифра 2 увек на првом месту [**3 поена**]. За сваки избор постоји 6 могућности за редослед друге, треће и четврте цифре [**4 поена**]. Дакле, тражени број је $3\cdot 6 = 18$ [**4 поена**].

3. Висина призме и најдужа дијагонала основе су 12 cm [**2 поена**]. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида чије су дијаголане 6 cm и $6\sqrt{2}$ cm [**10 поена**], па је површина основе $B = 72\sqrt{2}$ cm^2 [**6 поена**], а запремина призме је $V = 864\sqrt{2}$ cm^3 [**2 поена**].

4. $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2}=\dfrac{m^2-4+2020}{|m|+2}=|m|-2+\dfrac{2020}{|m|+2}$ [**5 поена**]. Полазни број је цео ако $(|m|+2)\,|\,2020$. Како је $2020 = 1\cdot 2^2\cdot 5\cdot 101$, његови делиоци су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 и 2020 (има их 12) [**4 поена**]. $|m|+2$ не може бити једнако 1. Ако је $|m|+2=2$ мора бити $m = 0$, а у свим осталим случајевима постоје по две могућности за m. Дакле, оваквих бројева m има 21 и они су: 0, 2, –2, 3, –3, 8, –8, 18, –18, 99, –99, 200, –200, 402, –402, 503, –503, 1008, –1008, 2018, –2018 [свака 2 тачно записана решења **по 1 поен**. Ако је ученик записао сва решења **11 поена**].

5. (**МЛ 54/1**) Нека је најпре $p = 2$. Тада треба да важи $5 + q^2 = n^2$, тј. $n^2-q^2=(n-q)(n+q)=5$, одакле је $n+q=5$ и $n-q=1$, тј. $q=2$ $(n=3)$ [**5 поена**]. Претпоставимо сада да важи $p > 2$ и $q > 2$. За квадрат непарног броја важи $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, па је остатак при дељењу са 4 непарног броја једнак 1 [**5 поена**]. У релацији $p^2+q^2+1 = n^2$ сви бројеви p, q, 1 и n су непарни [**5 поена**], па је остатак при дељењу са 4 леве стране једнакости 3, а десне 1, што је немогуће [**5 поена**]. Дакле, једино решење задатка је $p=q=2$.