

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Окружно такмичење из математике ученика основних школа**

**12.03.2022 - VIII разред**

1. Основа праве четворостране призме је ромб чија је страница дужине 12 cm и оштар угао  $60^\circ$ . Израчунај запремину призме ако је висина једнака половини дуже дијагонале ромба у основи.
2. Колико има шестоцифрених природних бројева дељивих са 5, који се записују само цифрама 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифре се не понављају), при чему цифре 1 и 2 не могу бити једна до друге?
3. Основа тростране пирамиде  $ABCS$  је једнакокрано-правоугли троугао  $ABC$ , са правим углом у темену  $B$ , а врх  $S$  се нормалном пројекцијом на раван основе пројектује у тачку  $D$ , која је средиште ивице  $AC$ . Ако је бочна страна  $ACS$  правоугли троугао са правим углом код темена  $S$  и  $SD = \sqrt{2}$  cm, израчунај површину пирамиде  $ABCS$ .
4. У скупу целих бројева реши једначину  $y^4 + x = xy + 8$ .
5. Да ли је могуће бројеве  $3, 3^2, \dots, 3^{n-1}, 3^n$  поделити у три групе (не обавезно са истим бројем елемената) тако да је производ елемената сваке групе исти, уколико је:  
а)  $n = 2022$ ; б)  $n = 2023$ ?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

## VIII РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

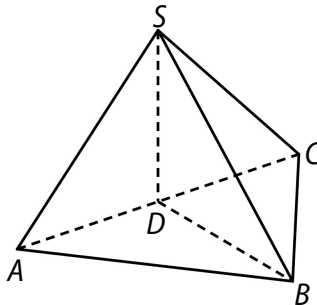
1. Површина основе једнака је збиру површина два једнакостранична троугла, па је  $B = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$  [8 бодова]. Дужа дијагонала основе је  $d_1 = 12\sqrt{3} \text{ cm}$  [8 бодова], па је тражена

запремина  $V = B \cdot \frac{d_1}{2} = 1296 \text{ cm}^3$  [4 бода].

2. Последња цифра свих тражених бројева мора да буде 5 [2 бода]. Цифре 1, 2, 3, 4 и 6 се на првих 5 позиција могу распоредити на  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  начина [4 бода]. Случај када су цифре 1 и 2 једна до друге своди се на случај када 4 цифре треба распоредити на 4 места, а таквих могућности има  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  [5 бодова], при чему се цифре 1 и 2 у свакој од тих могућности могу распоредити на 2 начина [4 бода]. Тражени број петоцифрених бројева једнак је  $120 - 2 \cdot 24 = 72$  [5 бодова].

3. Тачка  $S$  се налази на симетрали странице  $AC$ , па је  $AS = SC$ . Дакле, троугао  $ACS$  је једнакокрако-правоугли, па су троуглови  $ABC$  и  $ACS$  подударни [5 бодова] и површина сваког је  $\frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \text{ cm}^2$ .

Троуглови  $SDC$  и  $SDB$  су једнакокрако-правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо да је:  $SC = SB = SA = BC = BA = 2 \text{ cm}$  [5 бодова]. Одавде закључујемо да су троуглови  $ABS$  и  $BCS$  једнакостранични и површина сваког је  $\sqrt{3} \text{ cm}^2$  [5 бодова]. Површина пирамиде је  $P = 2(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS}) = 2(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$  [5 бодова].



4. Полазну једначину можемо записати у облику  $x(y - 1) = y^4 - 8$ , а како је  $y \neq 1$ , добијамо  $x = \frac{y^4 - 8}{y - 1} = \frac{y^4 - 1}{y - 1} - \frac{7}{y - 1} = (y^2 + 1)(y + 1) - \frac{7}{y - 1}$  [10 бодова]. Из услова  $x \in \mathbb{Z}$ , важи  $(y - 1) \mid 7$ , па  $y - 1 \in \{-7, -1, 1, 7\}$  [6 бодова]. Решења су  $(x, y) \in \{(-184, -6), (8, 0), (8, 2), (584, 8)\}$  [4 бода].

5. (МЛ 54/1) Производ свих  $n$  бројева је  $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$  [4 бода]. Ако бројеви могу да се поделе у три групе тако да је производ у свакој групи исти (на пример једнак је  $A$ ), онда мора да буде  $A^3 = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Закључујемо да  $3 \mid \frac{n(n+1)}{2}$  [5 бодова]. Како  $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$  није дељиво са 3, закључујемо да за  $n = 2023$  није могуће поделити бројеве на тражени начин [5 бодова]. Покажимо да је то могуће за  $n = 2022$ . Да бисмо ово показали потребно је конструисати барем једну поделу датих бројева на три групе тако да је производ бројева у све три групе једнак, односно да је збир изложилаца у све три групе једнак. Бројеве 1, 2, 3, ..., 2021, 2022 можемо поделити у скупове од по шест узастопних бројева на следећи начин:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \dots, \{2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022\}$ . У сваком од ових скупова, збир првог и шестог; другог и петог, трећег и четвртог записаног броја је једнак. Дакле, ако из сваког скупа у по једну групу ставимо по један пар поменутих бројева, добићемо тражену поделу [6 бодова].