Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

12.03.2022.

VII разред

1. Упореди разломке $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}$ и $\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$.

2. Одреди последњу цифру збира

$$1^{2022}+2^{2022}+3^{2022}+...+2021^{2022}.$$

3. У биоскоп су отишли две другарице и три друга и купили су 5 карата тако да седе у истом реду једно до другог. На колико начина они могу да седну на 5 седишта тако да другарице седе једна до друге? Замена места седења било које две особе се сматра новим распоредом седења.

4. Дат је трапез $ABCD$ основица $AB = 5$ cm и $CD = 3$ cm. Дијагонала AC је нормална на крак BC, а дијагонала BD дели угао на дужој основици на пола. Одреди висину тог трапеза.

5. Нека је M пресек симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC троугла ABC. Ако је центар уписане кружнице троугла AMB уједно и центар описане кружнице троугла ABC, одреди мере углова троугла ABC.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. За позитивне бројеве a, b, c, d важи да ако је $ad > bc$, онда је $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Ако је $a = 3^{2021} + 2$, $b = c = 3^{2022} + 2$ и $d = 3^{2023} + 2$, онда је

$ad = (3^{2021} + 2) \cdot (3^{2023} + 2) = 3^{4044} + 20 \cdot 3^{2021} + 4$ [**7 бодова**],

$bc = (3^{2022} + 2) \cdot (3^{2022} + 2) = 3^{4044} + 12 \cdot 3^{2021} + 4$ [**7 бодова**].

Како је $20 \cdot 3^{2021} > 12 \cdot 3^{2021}$, то је $ad > bc$, тј. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, па закључујемо да је $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2} > \frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$ [**6 бодова**].

2. У табели су приказане последње цифре 2022. степена бројева који се завршавају сваком могућом цифром (последње цифре степена се периодично понављају) [**10 бодова** за тачно одређене последње цифре степена].

Број	$\ldots1^{2022}$	$\ldots2^{2022}$	$\ldots3^{2022}$	$\ldots4^{2022}$	$\ldots5^{2022}$	$\ldots6^{2022}$	$\ldots7^{2022}$	$\ldots8^{2022}$	$\ldots9^{2022}$	$\ldots0^{2022}$
Последња цифра	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

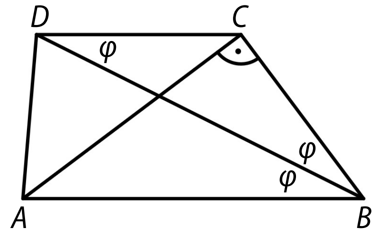
Збир бројева $1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 10^{2022}$ завршава се цифром 5 [**3 бода**]. Збир 2022-их степена првих 2020 бројева можемо да поделимо у 202 групе, где је последња цифра збира бројева у свакој групи 5:

$$1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 2020^{2022} = (1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 10^{2022}) + \ldots + (2011^{2022} + 2012^{2022} + 2013^{2022} + \ldots + 2020^{2022}),$$

па је последња цифра збира $1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 2020^{2022}$ цифра 0 [**5 бодова**]. Последња цифра траженог збира је 1 [**2 бода**].

3. Како другарице седе једна до друге, проблем се своди на ситуацију када 4 особе треба распоредити на 4 места. То се може урадити на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начина [**12 бодова**]. Како се две девојчице могу распоредити на 2 начина да седе једна до друге, то је укупан број распореда $24 \cdot 2 = 48$ [**8 бодова**].

4. (**МЛ 54/5**) Углови ABD и BDC су једнаки као углови са паралелним крацима [**2 бода**]. Како дијагонала BD дели угао на дужој основици на пола, то су једнаки и углови ABD и CBD. Троугао BCD једнакокраки, па је $BC = CD = 3$ cm [**6 бодова**]. Троугао ABC је правоугли, па Питагорином теоремом добијамо да је $AC = 4$ cm [**4 бода**]. Висина трапеза једнака је висини која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC, па је $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot AB}{2}$, одакле је висина трапеза $h = 2{,}4$ cm [**8 бодова**].



5. Означимо углове троугла са α, β, γ и нека је O центар описане кружнице троугла ABC и уписане кружнице троугла ABM. Како је AM симетрала угла α, то је $\measuredangle CAM = \measuredangle MAB = \frac{\alpha}{2}$ [**2 бода**]. OA је симетрала угла MAB, па је $\measuredangle MAO = \measuredangle OAB = \frac{\alpha}{4}$ [**2 бода**]. Дужи OA, OB и OC су полупречници описане кружнице троугла ABC, па су троуглови OAB, OBC и OCA једнакокраки. Одавде добијамо да је $\measuredangle OCA = \measuredangle OAC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}$ [**4 бода**], и $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \frac{\alpha}{4}$ [**4 бода**]. Сада имамо да је $\beta = \frac{\alpha}{2}$ и $\gamma = \alpha$ [**4 бода**]. Из једнакости $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ добијамо да је $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 72°$ [**4 бода**].