

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

12.03.2022 - VI разред

1. Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите и:
а) дељиви су са 10;
б) збир прве и последње цифре је 8?
2. Збир два броја и њиховог збира је $\frac{40}{21}$. Израчунај сабирке ако је апсолутна вредност једног четири пута већа од апсолутне вредности другог.
3. Дат је троугао ABC . Угао који граде симетрале спољашњих углова код темена B и C једнак је унутрашњем углу код темена A и за 7° је већи од унутрашњег угла код темена C . Упореди дужине страница троугла ABC .
4. Нека је n најмањи природан број дељив са 60, који се записује само помоћу цифара 0 и 7. Колико делилаца има број n ?
5. У Петровом одељењу има n ученика. Сви ученици скупљају албуме са сличицама. Сваки ученик је сакупио бар један албум, а највише од свих, 8 албума, сакупио је Петар. Одреди најмању вредност броја n тако да сигурно можемо да тврдимо да постоји бар 5 ученика који су сакупили исти број албума.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. а) Цифра јединица мора да буде 0 [2 бода]. Од цифара 1, 2, ..., 9, цифра на месној вредности десетица хиљада може се одабрати на 9 начина. Цифра на месној вредности јединица хиљада на 8 начина, на месној вредности стотина на 7 начина и на месној вредности десетица на 6 начина [4 бода]. Дакле, укупно постоји $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ [4 бода] петоцифрених бројева дељивих са 10.

б) Прва и последња цифра броја се могу изабрати на 7 начина (1 и 7; 2 и 6; 3 и 5; 5 и 3; 6 и 2; 7 и 1; 8 и 0) [4 бода]. За избор цифара на месним вредностима јединица хиљада, стотина и десетица, када су прва и последња цифра већ изабране, постоји редом 8, 7 и 6 могућности (јер су све цифре различите), па тражених петоцифрених бројева има $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2352$ [6 бодова].

2. (МЛ 55/4) Означимо сабирке са a и b . По услову задатка је $a + b + (a + b) = \frac{40}{21}$, одакле је $a + b = \frac{20}{21}$ [4 бода]. Како је $|a| = 4|b|$, разликоваћемо два случаја.

Ако је $a = 4b$, онда је $b = \frac{4}{21}$ и $a = \frac{16}{21}$ [8 бодова].

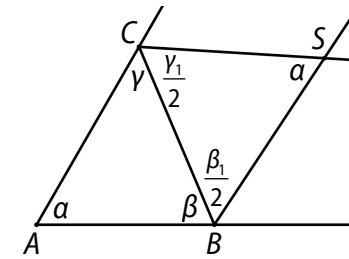
Ако је $a = -4b$, онда је $b = -\frac{20}{63}$ и $a = \frac{80}{63}$ [8 бодова].

3. По услову задатка је $\sphericalangle CSB = a$, $a = \gamma + 7^\circ$, $\sphericalangle SCB = \frac{\gamma_1}{2} = \frac{a + \beta}{2}$, $\sphericalangle SBC =$

$\frac{\beta_1}{2} = \frac{a + \gamma}{2} = \frac{2a - 7^\circ}{2}$. За унутрашње углове у троуглу BSC важи да је

$a + \frac{a + \beta}{2} + \frac{2a - 7^\circ}{2} = 180^\circ$, одакле је $5a + \beta = 367^\circ$ (*1) [7 бодова]. За

унутрашње углове у троуглу ABC важи да је $a + \beta + a - 7^\circ = 180^\circ$, одакле је $2a + \beta = 187^\circ$ (*2) [7 бодова]. Одузимањем једнакости (*2) од једнакости (*1) добијамо да је $a = 60^\circ$, а онда и $\gamma = 53^\circ$, $\beta = 67^\circ$ [4 бода]. Како је $\beta > a > \gamma$, онда је $b > a > c$ [2 бода].



4. Да би број био дељив са 60, потребно је да буде дељив и са 3 и са 4 и са 5 [2 бода]. Дакле, због дељивости са 5 последња цифра мора бити 0 [2 бода]. Да би број био дељив са 4, двоцифрени завршетак му мора бити дељив са 4. Како број 70 није дељив са 4, двоцифрени завршетак мора бити 00 [4 бода]. На крају, да би број био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Најмањи могући збир цифара који је дељив са 3 је 21, па је најмањи тражени број 77700 [6 бодова]. Како је $77700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 37$ [2 бода], то је број делилаца једнак $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 72$ [4 бода].

5. Преостала деца у Петровом одељењу могла су сакупити најмање 1, а највише 7 албума [5 бодова]. Ако је исти број албума сакупило по 4 ученика, тада би у одељењу било $7 \cdot 4 + 1 = 29$ ученика [10 бодова]. Сваки следећи ученик би био пети ученик у групи која је сакупила исти број албума, па је у одељењу најмање 30 ученика [5 бодова].