Задаци и решења

Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд

"*М И С Л И Ш А*"

Математичко такмичење за ученике ОШ

по угледу на

Међународно такмичење "КЕНГУР"

2008 **6. разред**

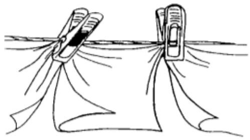
Задаци који се оцењују са 3 бода

1. На Марковој рођенданској торти горело је 6 свећица. Једна свећица изгори за 6 минута. За колико ће минута изгорети свих 6 свећица ако су упаљене истовремено?

(A) 6 min (B) 3 min (C) 12 min (D) пола сата (E) 6 min

Решење: (A) 6 min. Свећице су упаљене истовремено.

2. Сањина мама је опрала стољњаке, а Сања их је на раширила да се осуше - као што је показано на слици. Колико стољњака је Сања раширила, ако се зна да је употребила 10 штипаљки.



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) не може се одредити

Решење: (C) 9. Нацртај слику!

3. Колико је $(-5)-(-4)+(-3)-(-2)+(-1)$?

(A) -2 (B) -3 (C) -6 (D) -10 (E) -14

Решење: (B) -3.

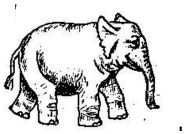
$(-5)-(-4)+(-3)-(-2)+(-1)=-5+4-3+2-1=-3$

4. Ако је $-2\frac{3}{4}-x=5\frac{1}{2}$, онда је

(A) $x=3\frac{5}{2}$ (B) $x=-3\frac{1}{2}$ (C) $x=3\frac{1}{2}$ (D) $x=-7\frac{2}{4}$ (E) $x=-8\frac{1}{4}$

Решење: (E) $x=-8\frac{1}{4}$

5. Слон је прешао 1 километар за 10 минута.



Којом брзином се кретао слон?

(A) $0{,}6\frac{km}{h}$ (B) $60\frac{km}{h}$ (C) $8\frac{km}{h}$ (D) $16\frac{km}{h}$ (E) $6\frac{km}{h}$

Решење: (E) $6\frac{km}{h}$.

Време од 10 минута представља шестину једног часа. То значи да ће за 6 пута дуже време слон прећи 6 пута дужи пут (наравно, под основном претпоставком да се слон кретао равномерном брзином). Слон ће, дакле, за 1 час прећи 6 километара, тј. његова брзина ће бити $6\frac{km}{h}$.

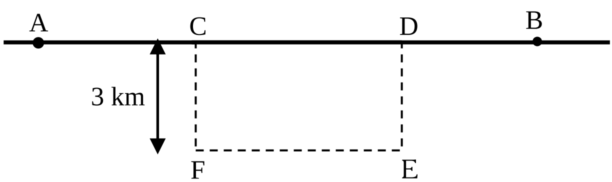
6. Страница једнакостраничног троугла је за 7 cm мања од збира других двеју страница. Колики је обим тог троугла?

(A) 7 (B) 14 (C) 21 (D) 28 (E) немогуће је одредити

Решење: (C) 21

Текст задатка можемо другачије исказати овако: ако бисмо једној страници једнакостраничног троугла додали још 7 cm, добили бисмо збир дужина друге две странице. То значи да уочених 7 cm чине тачно дужину једне странице тог једнакостраничног троугла.

7. Од града A до града B може се стићи аутопутем, али се на делу пута иазмеђу тачака C и D изводе радови, па се мора ићи обилазним путем, који је на слици приказан испрекиданом линијом. Ако се зна да је CDEF парвоугаоник, за колико километара ће бити дужи пут од града A до града B док трају радови на путу?



(A) 3 km (B) 6 km (C) 11 km (D) 16 km (E) не може се одредити

Решење: (B) 6 km.

Само CF и DE представљају увећање дужине пута између места A и B (FE=CD, а то би и иначе требало прећи).

8. Један од гостију приметио је да на забави не постоје две особе рођене истог месеца. Колико је највише особа могло бити на тој забави?

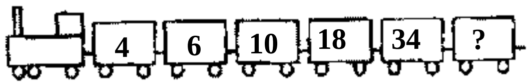
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 24 (E) 364

Решење: (A) 12.

Како на забави не постоје две особе рођене у истом месецу, значи да су све присутне особе рођене у различитим месецима. Како у години има само 12 различитих месеци, значи да је на забави могло бити највише 12 особа.

Задаци који се оцењују са 4 бода

9. Који број треба уписати на последњем вагону овог необичног воза?



(A) 52 (B) 64 (C) 66 (D) 72 (E) 88

Решење: (C) 66

Ако посматрамо редом разлике између суседних чланова овог низа (2, 4, 8, 16), лако ћемо закључити да следећа разлика треба да буде 32, па је тражени број $34+32=66$

10. Међу бројевима $4, -8, 3, -6, 5, -7$ изаберите два различита тако да њихов производ буде најмањи. Колики је тај производ?

(A) 56 (B) 48 (C) -40 (D) -42 (E) -56

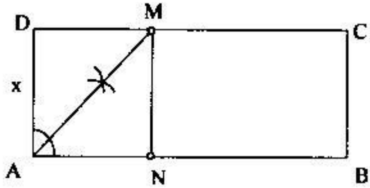
Решење: (C) -40.

Да би производ био што мањи, у овом случају треба да буде негативан и да има што је могуће већу апсолутну вредност, тј. $(-8)\cdot 5 = -40$. Сви остали производи су већи.

11. У правоугаонику ABCD симетрала угла код темена A сече страницу CD у тачки M, при чему је CM = 15 cm. Обим правоугаоника је 70 cm. Колика је његова површина.

(A) 1050 cm^2 (B) 750 cm^2 (C) 650 cm^2 (D) 550 cm^2 (E) 250 cm^2

Решење: (E) 250 cm^2.



Нека је $MN \perp AB$. Добијени четвороугао ANMD је квадрат странице x. Тада је $O = 4x+2\cdot 15 = 70 \Rightarrow x=10$ cm. Површина правоугаоника је $P=(10+15)\cdot 10=250$ (cm^2).

12. Шестина ипо од 100 колико је то?

(A) 16 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 30

Решење: (C) 25.

Како је $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, значи да се тражи $\frac{1}{4}$ од 100, а може и овако: $1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 100=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 100=\frac{1}{4}\cdot 100=25$

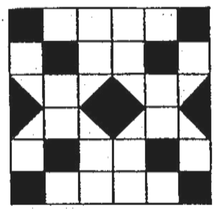
13. Збир бројева $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, -0{,}5$ и $-1\frac{1}{4}$ једнак је:

(A) -1 B) 0 C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 1,5

Решење: (B) 0

Ако сабирке "препакујемо" имаћемо: $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0$

14. У ком односу стоје површине црних и белих делова великог квадрата?



(A) 1:1 (B) 1:2 (C) 1:3 (D) 2:3 (E) 3:4

Решење: (B) 1:2

Велики квадрат састоји се из 6·6=36 мањих квадрат[а]. Пребројавањем и друкчијим распоређивањем црних поља (од 2 црна троуглића можемо сложити 1 црни квадратић), видимо да црна поља прекривају 12 квадратића, а слично томе, видимо да бела поља прекривају 24 квадратића. То можемо приказати као 12:24=1:2.

15. Колико грама има једна крушка?

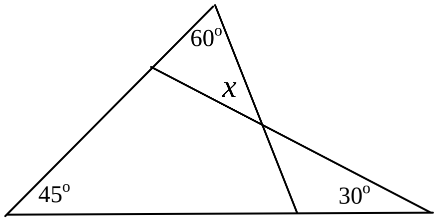
На десном тасу теразија је тег од 250 g.

(A) 250 g (B) 125 g (C) 50 g (D) 150 g (E) не може се одредити

Решење: (B) 125 g

Ако и са левог и са десног таса склонимо по једну крушку и по једну јабуку, теразије ће и даље бити у равнотежи, али ће на левом тасу бити 2 крушке, а на десном само тег од 250 g, што значи да једна крушка има 125 g.

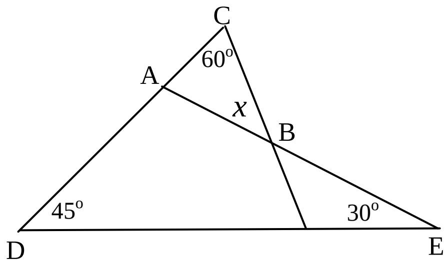
16. Колики је угао x на слици?



(A) 30° (B) 35° (C) 40°
(D) 45° (E) 50°

Решење: (D) 45°

Угао код темена A у троуглу ABC је, као спољашњи угао троугла ADE, једнак збиру два унутрашња несуседна угла (45° и 30°), па износи 75°. Тражени угао је онда трећи угао троугла ABC.



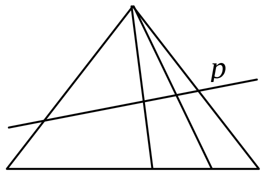
$x = 180° - (60° + 75°) = 180° - 135° = 45°$

17. Аца је у продавници купио хлеб и сир и потрошио половину укупне суме коју је имао. Затим је за 30 динара купио аутобуску карту и одвезао се до књижаре. У књижари је купио књигу за коју је потрошио половину преостале суме и још 10 динара. Пребројао је новац који му је остао, потрошио половину те суме за свеску, а затим је 40 динара дао за сладолед. После тога остало му је тачно 30 динара да купи аутобуску карту за повртак кући. Колико је новца имао Аца на почетку?

(A) 330 (B) 360 (C) 600 (D) 660 (E) 1320

Решење: (D) 660

Ово је пример задатка који је погодан да се решава "с краја".
Аци је на крају остало тачно 30 динара за аутобуску карту, јер је претходно купио сладолед за 40 динара. Сада 30+40=70 (динара) представља половину суме која му је остала када је претходно купио свеску, итд...

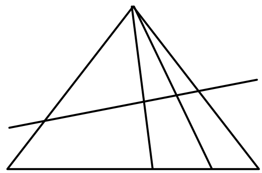


<u>Задаци који се оцењују са 5 бодова</u>

18. Колико троуглова видите на овој слици?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Решење: (C) 12

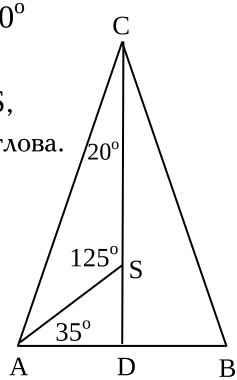


Прецизан одговор би био 6+6, јер на слици која не садржи праву *p* (погледати сличан задатак у 5. разреду) видимо 6 троуглова, а права не нарушава ни једног од њих већ, напротив, формира нових 6 (горњих, мањих) троуглова.

19. Симетрала угла на основици и симетрала угла при врху једнакокраког троугла ABC (AC=BC) секу се под углом од 125°. Колики је угао при врху?

(A) 30° (B) 40° (C) 50° (D) 60° (E) 70°

Решење: (B) 40°.



Угао од 125° је спољашњи угао правоуглог троугла ADS, па је зато једнак збиру унутрашњих њему несуседних углова. Како је један од тих углова прав, закључујемо да угао код темена A у троуглу ADS износи 35°. Како је то половина угла A у троуглу ABC, закључујемо да угао на основици у троуглу ABC има 70°, а то даље значи да је угао при врху 40°.

20. Јаша и Раша су на пијаци куплили лубенице: Јаша 3 kg, а Раша 2 kg лубеница. Тада им се придружи Саша и сва тројица заједно поједоше свих 5 kg лубеница (сваки је појео исту количину). Саша остави за део који је појео 100 динара и оде. Како ће Јаша и Раша међусобно поделити тај новац, тј. колико треба да припадне Јаши да би деоба била праведна?

(A) 20 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 80

Решење: (E) 80

Из податка да је Саша за део који појео оставио 100 динара, закључујемо да је укупна вредност сва три поједена дела била 300 динара, тј. да вредност свих 5 kg лубеница износи 300 динара. Одавде, даље, следи да 1 kg лубеница вреди 300:5=60 (динара). То значи да је за купљену лубеницу од 3 kg Јаша платио 3·60=180 (динара), а Раша 2·60=120 (динара). Како је Раша платио за своју лубеницу 180 динара, а појео лубенице у вредности од 100 динара, значи да њему од Сашиних 100 динара треба да припадне 80 динара. Слично закључујемо да Саши треба да припадне 20 динара.

21. Збир пет узастопних целих бројева је 0. Који међу њима је најмањи?

(A) −4 (B) −2 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Решење: (B) −2

Означимо те бројеве са x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$.

Према услову задатка треба да буде:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 0$$
$$5x + 10 = 0$$
$$x = -2$$

(Ако је средњи број x, онда дати услов записујемо овако:

$x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 = 0$, одакле је $x=0$).

22. Ако у једној учионици ученици седну по један у сваку клупу, неће бити довољно места за 7 ученика. Ако седну по двоје у сваку клупу, остаће 5 клупа празно. Колико има ученика, а колико клупа у тој чионици?

(A) 22 ученика и 17 клупа (B) 24 ученика и 10 клупа
(C) 20 ученика и 17 клупа (D) 24 ученика и 17 клупа
(E) немогуће је одредити

Решење: (D) 24 ученика и 17 клупа

Распоредимо, најпре, ученике тако да свако седне сам у једну клупу. Према услову задатка, 7 ученика ће тада стајати са стране.
Ако после тога, позовемо ученике да се разместе и да седну по двоје у сваку клупу, 5 клупа ће бити слободно. То значи да ће ученици из тих 5 клупа прећи код својих другара, али ће и оних 7 ученика, који су у првом распореду стајали са стране, дакле њих укупно 12, формирати сада 12 парова (сешће у клупу где већ седи један ученик). Дакле, у том одељењу има 24 ученика. Пошто су они сели у 12 клупа, а 5 клупа је остало празно, значи да у тој учионици има 17 клупа.

23. Колики је збир решења једначине $|2-x|=2$?

(A) 0 (B) 2 (C) − 2 (D) 4 (E) − 4

Решење: (D) 4

Као што знамо, једначину $|2-x|=2$ можемо написати у облику:
$2-x=2$ или $2-x=-2$, одакле редом добијамо: $x=0$ или $x=4$, па је тражени збир решења 0+4=4

24. Пинокио је за закључавање своје куће смислио шифру у облику двоцифреног броја. Наравно, он је шифру убрзо заборавио, али се сећа да је збир цифара тога броја сабран са производом тих истих цифара био једнак самом броју.
Колико има бројева који би могли да буду Пинокијева шифра за откључавање врата?

(A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 2 (E) 1

Решење: (A) 9

То су бројеви: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.
Заиста, ако прву цифру тога броја означимо са x, а другу са y, онда тражени двоцифрени број (Пинокијеву шифру) можемо записати у облику $10x+y$. Услове које тај број треба да испуњава можемо записати у облику $(x+y)+x\cdot y=10x+y$. Одавде је $x\cdot y=9x$.
Анализом овог закључка добијамо следеће:
Тражена шифра је двоцифрени број, дакле x не може бити 0. Даље видимо да је $y=9$, а x може бити ма који број осим 0.

25. Аутобус се из села у град кретао брзином 40 km/h, а када се враћао назад кретао се брзином 60 km/h. Колика је била његова средња брзина на читавом путу?

(A) 45 km/h (B) 48 km/h (C) 50 km/h (D) 54 km/h (E) 56 km/h

Решење: (B) 48 km/h

Растојање између села и града означимо са s. Пошто је аутобус два пута прешао тај пут, онда је укупан пут $2s$, а укупно време проведено на читавом путу $\frac{s}{40}+\frac{s}{60}$ часова.
Средња брзина на читавом путу се израчунава као укупан пут кроз укупно време, па имамо: $v_{sr}=\dfrac{2s}{\frac{s}{40}+\frac{s}{60}}=48$ (km/h).

8888 Пера је посматрао један троугао и запазио да је једна његова висина једнака једној његовој страници, а друга висина једнака другој страници. Какав троугао је Пера посматрао?

(A) једнакокраки (B) једнакостранични (C) правоугли
(D) оштроугли (E) не може се утврдити

Решење: (C) правоугли
Код правоуглог троугла свака од катета уједно је и висина троугла!

&&&) Коју најмању вредност (у степенима) може имати највећи угао у троуглу?

(A) 55^{o} (B) 60^{o} (C) 70^{o} (D) 75^{o} (E) 90^{o}

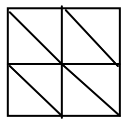
Решење: (B) 60^{o}.

Означимо са α, β, γ углове троугла и нека је $0<\alpha<\beta<\gamma$. Доказаћемо да је најмања вредност $\gamma=60^{o}$. Покажимо најпре да је $\gamma\geq 60^{o}$. Претпоставимо супротно, тј. да је $\gamma\leq 60^{o}$. Тада је $\beta<60^{o}$ и $\alpha<60^{o}$, па би због тога било и $\alpha+\beta+\gamma<180^{o}$, што је немогуће. Значи, $\gamma\leq 60^{o}$. Покажимо да може бити $\gamma=60^{o}$. Заиста, ако је $\alpha=\beta=\gamma=60^{o}$, онда су сви услови задатка испуњени.

10. Картон облика квадрата има димензије $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Милица га је најпре разрезала на квадратиће површине 25 cm^2, а затим је сваки тај квадратић разрезала на два троугла. Колико је, после тога, Милица имала троуглова?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16 cm

Решење: (A) 8



13. На фудбалском турниру који се играо по систему сваки са сваким по једну утакмицу, одиграно је укупно 10 утакмица. Колико је клубова играло на том турниру?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

Решење: (E) 5

Задатак ћемо гометријски интерпретирати. У равни је дато неколико тачака и све су међусобно повезане дужима. Тако је на слици настало укупно 10 дужи. Колико је тачака дато?

Другим речима, тражи се да решимо следећу једначину: $\frac{n(n-1)}{2}=10$,

тј. једначину $n(n-1)=20$. Ово значи да тражимо два узастопна броја чији је производ 20. До коначног решења лако долазимо. Број тачака, односно екипа на том турниру био је 5.

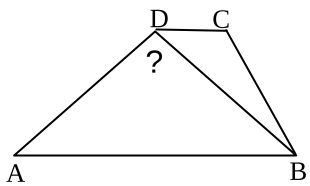
20. Сваки пут кад испуни жељу свога власника, дужина чаробног ћилима се смањи за $\frac{1}{2}$, а ширина за $\frac{1}{3}$. После три испуњене жеље чаробни ћилим је имао површину 4 m^2. Његова почетна ширина је била 9 m. Колика му је била почетна дужина?

(A) 4 m (B) 12 m (C) 18 m (D) 36 m (E) немогуће је одредити

Решење: (B) 12 m.

Задатак решавамо "с краја".

****)На слици је приказан трапез код кога је $BD=AD$, $\angle DCB=110^\circ$, и $\angle CBD=30^\circ$. Одредите $\angle ADB$.



(A) 80° (B) 90° (C) 100° (D) 110° (E) 120°

Решење: (C) 100°

Угао код темена D у троуглу BCD је $180^\circ-(110^\circ+30^\circ)=40^\circ$. Угао код темена B у троуглу ABD је такође 40° (као наизменичан са углом D у троуглу BCD). Како је троугао ABD једнакокрак, угао код темена A је такође 40°, а тражени угао је тада угао при врху у једнакокраком троуглу, па је $\angle ADB=100^\circ$.

6. ***разред***

1. (B) 10
2. (B) 10
3. (B) 10

4. (B) 10
5. (B) 10
6. (B) 10
7. (B) 10
8. (
9. (
10. (B) 10
11. (B) 10
12. (B) 10
13. (B) 10
14. (B) 10
15. (B) 10
16. (B) 10
17. (B) 10
18.

19. (B) 10
20. (B) 10
21. (B) 10

22.
23. (B) 10
24. (B) 10
25. (B) 10