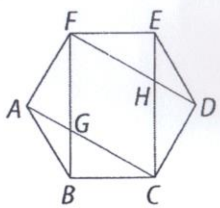
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
25.02.2017.

VIII разред

1. Реши једначину $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|x-1|}}}=2017$.

2. На слици је правилан шестоугао $ABCDEF$. Ако је $AB = 6\text{cm}$ израчунај обим четвороугла $GCHF$.



3. Дијагонала AC_1 правилне четворостране призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и бочна ивица AA_1 граде угао од 30°. Ако је запремина призме $108\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, израчунај дужину дијагонале призме.

4. Нека су a и b природни бројеви, такви да је $a < b$ и број $11a + 13b$ је дељив са 12. Докажи да број $b - a$ има бар шест различитих природних делилаца.

5. Одреди све троцифрене бројеве који су три пута већи од квадрата збира својих цифара.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ LI-1**) Редом добијамо $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|x-1|}}=\dfrac{1}{2017}$ (**4 поена**), $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|x-1|}}=\dfrac{2016}{2017}$ (**4 поена**), $1+\dfrac{1}{|x-1|}=\dfrac{2017}{2016}$ (**4 поена**), $\dfrac{1}{|x-1|}=\dfrac{1}{2016}$ (**4 поена**), $|x-1| = 2016$, па су решења једначине бројеви 2017 и –2015 (**4 поена**; 0 поена ако се наведе само једно решење).

2. (**МЛ LI-2**) На основу једнакости страница и углова правилног шестоугла следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle DCE = \measuredangle EFD = \measuredangle AFB = 30°$. Како је $\measuredangle GBC = \measuredangle HDC = \measuredangle HEF = \measuredangle GAF = 90°$ и $FA = BC = CD = EF$ следи $\triangle BCG \cong \triangle DCH \cong \triangle EFH \cong \triangle AFG$ (УСУ). Из подударности следи $CG = CH = FH = FG$, тј. овај четвороугао је ромб (**10 поена**). Како је катета BC троугла BCG једнака 6cm, а $\measuredangle BCG = 30°$, лако се налази да је хипотенуза $CG = 4\sqrt{3}\text{cm}$, што је страница четвороугла. Обим четвороугла је $16\sqrt{3}\text{cm}$ (**10 поена**).

Напомена. Прихватити и: С обзиром да је шестоугао правилан, следи $\triangle BCG \cong \triangle DCH \cong \triangle EFH \cong \triangle AFG$ (УСУ). Из подударности следи $CG = CH = FH = FG$ (**10 поена**).

3. (**МЛ LI-2**) Означимо дијагоналу призме са D, дијагоналу основе са d и висину призме са H. Тада из троугла AA_1C (чији су углови 90°, 60° и 30°) добијамо да је $d=\dfrac{D}{2}$ и $H=\dfrac{D}{2}\sqrt{3}$ (**5 поена**), па је запремина $V=\dfrac{1}{2}d^2H=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{D^2}{4}\cdot\dfrac{D}{2}\sqrt{3}=\dfrac{1}{16}D^3\sqrt{3}$ (**10 поена**). Из $V=108\sqrt{3}\text{cm}^3$ је $D^3 = 16 \cdot 108 = 2^6 \cdot 3^3$, па је $D = 12\text{cm}$ (**5 поена**).

4. Ако $12 \mid (11a + 13b)$, онда $12 \mid (11a + 13b) - (12a + 12b) = b - a$ (**10 поена**). Дакле, (природан) број $b - a$ је дељив са 12, а тиме и са свим његовим природним делиоцима, којих је шест (**10 поена**).

5. *Прво решење*. Нека је $X=\overline{abc}$ тражени број. Из услова $X = 3(a + b + c)^2$ редом следи $3 \mid X$, затим $3 \mid (a + b + c)$ (**3 поена**), $9 \mid X$, $9 \mid (a + b + c)$ (**3 поена**) и најзад $243 = 3 \cdot 9^2 \mid X$ (**3 поена**). Троцифрени бројеви дељиви са 243 су 243, 486, 729 и 972 (**3 поена**). Провера показује да бројеви 243 и 972 задовољавају услове задатка (свако решење **по 4 поена**).

Друго решење. Нека је $X=\overline{abc}$ тражени број и $n = a + b + c$. За $n \le 5$, као и за $n \ge 19$, број $3n^2$ није троцифрен (**12 поена**). Провера за $n \in \{6, 7, 8, ... 18\}$ даје следеће вредности за број $3n^2$ и његов збир цифара

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$3n^2$	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
збир	9	12	12	9	3	12	9	12	21	18	21	21	18

Видимо да је једино у случајевима $n \in \{9, 18\}$ испуњен услов задатка. Тражени бројеви су $X \in \{243, 972\}$ (свако решење **по 4 поена**).