ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА
35. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, мај 2000.

VI разред

1. Један бициклиста је кренуо из А ка Б а истовремено други из Б ка А. Сваки од њих се креће константном брзином и кад дође на циљ одмах се враћа назад. Први пут су се срели на удаљеност $4\,km$ од Б а други пут на удаљености $2\,km$ од А, $48\,min$ након првог сусрета. Одредити растојање између А и Б и брзине једног и другог бициклисте. (20 п.)

2. Група извиђача је са пристаништа кренула чамцем низ реку у тренутку када је поред пристаништа пролазио сплав (пловило без икаквог погона). Извиђачи су одвеслали низводно $20\,km$ и вратили се, без задржавања, назад у пристаниште. Путујући низводно и узводно провели су укупно 7 сати. У повратку су на $12\,km$ од пристаништа срели исти онај сплав са којим су истовремено кренули са пристаништа. Одредити брзину реке и брзину чамца. (20 п.)

3. У суд облика квадра сипане су једнаке масе живе и воде. Укупна висина стуба течности у суду износи $H = 0,4\,m$. Наћи притисак течности на дно суда. Густина живе је $\varrho_z = 13,6 \times 10^3\,kg/m^3$, густина воде $\varrho_v = 1 \times 10^3\,kg/m^3$ и гравитациона константа $G = 10\,N/kg$. (20 п.)

4. Три младе физичарке Цаца, Маца и Даца изводе експерименте везане за средњу густину смеша течности тако што мешају течност A густине ϱ_A и течност B густине ϱ_B па онда рачунају средњу густину а истовремено је и мере да могу да упореде. Замислиле су компликован експеримент:

Прво Цаца узима 100 грама течности A и 100 грама течности B и меша их у посуди коју су означиле са I. Када течности добро промеша одлива по 100 грама смеше у посуде II и III. У посуду II додаје 100 грама течности A, а у посуду III 100 грама течности B. Опет их меша, мери и рачуна средњу густину за обе смеше.

Маца сада одлива по 100 грама смеше из посуде II у посуде IV и V, а по 100 грама из посуде III у посуде VI и VII. Онда у посуде IV и VI додаје по 100 грама течности A а у посуде V и VII додаје по 100 грама течности B. Она исто мери и рачуна средње густине ових смеша.

Даци је досадило да експериментише па садржај посуда IV, V, VI и VII саспе у посуду $VIII$.

Израчунати колика је густина смеше у посуди $VIII$. Резулатат изразити преко ϱ_A и ϱ_B. (20п.)

5. Дрвена коцка плива на површини воде тако да се у води налази 9/10 њене вертикалне странице. Колики део странице ће бити у води ако преко воде налијемо уље тако да потпуно потопимо коцку, тј да се површина уља нађе на истом нивоу са горњом страном коцке. Густина уља износи $\varrho_u = 0,8 \times 10^3\,kg/m^3$ а густина воде $\varrho_v = 1 \times 10^3\,kg/m^3$ (20 п.)

Задатке припремили: др Мирослав Николић и др Дарко Капор
Рецензент: др Иван Манчев
Председник комисије: др Надежда Новаковић

Свим такмичарима желимо успешан рад !

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА
35. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, мај 2000.

VI разред, Решења задатака

1. Нека је дужина целог пута s, растојање од А до места првог сусрета s_1 а растојање од Б до места првог сусрета $s_2 = 4\,km$ и нека је растојање од А до места другог сусрета $s_3 = 2\,km$. Јасно је да је $s = s_1 + s_2$. Нека је t_1 време од почетка кретања до првог сусрета а t_2 до другог сусрета. На основу овога можемо да напишемо следеће односе: $s_1 = v_1 t_1$ и $s_2 = v_2 t_1$ па је $s = (v_1 + v_2)t_1$ (1). До другог сусрета први бициклиста пређе пут $2s - s_3$ па је $2s - s_3 = v_1 t_2$ (2). До другог сусрета други бициклиста пређе пут $s + s_3$ па је $s + s_3 = v_2 t_2$ (3). Сабирањем друге и треће једначине добија се: $3s = (v_1 + v_2)t_2$. Ако у последњу једначину заменимо s из (1) па леву и десну страну поделимо са $(v_1 + v_2)$ добијамо $3t_1 = t_2$. Из услова задатка знамо да је $t_2 - t_1 = 48\,min = 0{,}8\,h$. Из последњих двеју једначина лако налазимо $t_1 = 0{,}4\,h = 24\,min$ и $t_2 = 1{,}2\,h = 72\,min$. Из ралације $s_2 = v_2 t_1$ налазимо $v_2 = s_2/t_1 = 10\,km/h$. Из релације (3) добијамо $s = v_2 t_2 - s_3$. заменом бројних вредности добијамо $s = 10\,km$. Сада лако из (2) добијамо $v_1 = (2s - s_3)/t_2$ а заменом бројних вредности $v_1 = 15\,km/h$.

2. Нека је пут од пристаништа до места окрета чамца $s = 20\,km$, растојање од пристаништа до места сусрета $s_1 = 12\,km$, v брзина чамца у доносу на воду и v_r брзина реке и $t = 7\,h$ укупно време путовања чамца.. Укупно време путовања чамца може да са напише као: $t = \frac{s}{v + v_r} + \frac{s}{v - v_r}$ (1). Услов сусрета је: $\frac{s_1}{v_r} = \frac{s}{v + v_r} + \frac{s-s-1}{v - v_r}$ (2). Последња једначина може да се напише као $\frac{s_1}{v_r} = \frac{s}{v + v_r} + \frac{s}{v - v_r} - \frac{s_1}{v - v_r}$. Прва два сабирка десне стране представљају укупно време путовања чамца па је $\frac{s_1}{v_r} = t - \frac{s_1}{v - v_r}$. Ако из ове једначине израчунамо t добијамо $t = \frac{s_1 v}{v_r(v - v_r)}$. Ако средимо једначину (1) добијамо $t = \frac{2cv}{(v - v_r)(v + v_r)}$. Пошто је то исто време изједначавањем и множењем са $(v - v_r)$ и дељењем са v добијамо $\frac{2s}{s_1} = \frac{v + v_r}{v_r}$. Одавде налазимо $\frac{v_r}{v} = \frac{s_1}{2s - s_1}$. Са друге стране из $t = \frac{s_1 v}{v_r(v - v_r)}$ налазимо $\frac{v_r}{v} = 1 - \frac{s_1}{v_r t}$. Имамо две релације са истим левим странама па је због једнакости десних страна $\frac{s_1}{2s - s_1} = 1 - \frac{s_1}{v_r t}$. Одавде налазимо $v_r = \frac{s_1(2s - s_1)}{t(2s - 2s_1)}$. Заменом бројних вредности добијамо $v_r = 3\,km/h$. v налазимо из једне од релација које дају однос v_1/v. Имамо $\frac{v_r}{v} = \frac{s_1}{2s - s_1}$ а одавде је $v = \frac{(2s - s_1)v_r}{s_1}$. Заменом бројних вредности добијамо $v = 7\,km/h$

3. Маса живе је $m_z = \varrho_z h_z S$ а маса воде $m_v = \varrho_v h_v S$. Пошто су масе једнаке важи $\varrho_v h_v = \varrho_z h_z$. Такође је $h_v + h_z = H$. Из ових једначина налазимо $h_v = \frac{\varrho_z H}{\varrho_v + \varrho_z}$ и $h_z = \frac{\varrho_v H}{\varrho_v + \varrho_z}$. Ако то заменимо у израз за притисак $P = \varrho_v G h_v + \varrho_z G h_z$ срећивањем добијамо $P = \frac{2\varrho_v \varrho_z G H}{\varrho_v + \varrho_z}$. Заменом бројних вредности добијамо $P = 7452\,Pa$.

4. Суштина решења: кад се мешају једнаке масе важи: $\varrho_s = \frac{m}{V} = \dfrac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\varrho_1} + \dfrac{m_2}{\varrho_2}}$ за $m_1 = m_2$ добија се $\varrho_s = \dfrac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}$ а то може да се напише у облику $\varrho_s = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}}$.

Према томе имамо: Цаца:

$$\varrho_I = \frac{m+m}{\dfrac{m}{\varrho_A} + \dfrac{m}{\varrho_B}} = \frac{2\varrho_A\varrho_B}{\varrho_A + \varrho_B}; \varrho_{II} = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_A} + \dfrac{1}{\varrho_I}} = \frac{4\varrho_A\varrho_B}{\varrho_A + 3\varrho_B}; \varrho_{III} = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_B} + \dfrac{1}{\varrho_I}} = \frac{4\varrho_A\varrho_B}{3\varrho_A + \varrho_B}.$$

Маца:

$$\varrho_{IV} = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_{II}} + \dfrac{1}{\varrho_A}} = \frac{8\varrho_A\varrho_B}{\varrho_A + 7\varrho_B}; \quad \varrho_V = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_{II}} + \dfrac{1}{\varrho_B}} = \frac{8\varrho_A\varrho_B}{5\varrho_A + 3\varrho_B}$$

$$\varrho_{VI} = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_{III}} + \dfrac{1}{\varrho_A}} = \frac{8\varrho_A\varrho_B}{3\varrho_A + 5\varrho_B}; \quad \varrho_{VII} = \frac{2}{\dfrac{1}{\varrho_{III}} + \dfrac{1}{\varrho_B}} = \frac{8\varrho_A\varrho_B}{7\varrho_A + \varrho_B}$$

Даца:

$$\varrho_{VIII} = \frac{m+m+m+m}{\dfrac{m}{\varrho_{IV}} + \dfrac{m}{\varrho_V} + \dfrac{m}{\varrho_{VI}} + \dfrac{m}{\varrho_{VII}}} = \frac{4}{\dfrac{1}{\varrho_{IV}} + \dfrac{1}{\varrho_V} + \dfrac{1}{\varrho_{VI}} + \dfrac{1}{\varrho_{VII}}} = \frac{2\varrho_A\varrho_B}{\varrho_A + \varrho_B}.$$

Ако се добро размисли меша се уствари $400\,g$ течности A и $400\,g$ течности B па је према тома одмах јасно да је $\varrho_s = \dfrac{2\varrho_A\varrho_B}{\varrho_A + \varrho_B}$.

5. У оба случаја тежина је једнака сили потиска. Тежина коцке је $Q = \varrho_d GS(a_1 + a_2)$ где је ϱ_d густина дрвета, $S = a^2$ површина основе коцке, a_1 део странице коцке у ваздуху a_2 део странице коцке у води. Услов једнакости тежине и силе потиска је $F_{1v} = Q$. Овде је $F_{1v} = \varrho_v GSa_2$ сила потиска која делује на потопљени део. Скраћивањем S и G услов се своди на $\varrho_v a_2 - \varrho_d(a_1 + a_2) = 0$ (1). Након доливања уља опет је тежина једнака сили потиска па је $F_{2v} + F_u = Q$. Овде је $F_{2v} = \varrho_v GSa_4$ сила потиска на део у води а a_4 део странице у води. $F_u = \varrho_u GSa_3$ сила потиска на део у уљу а a_3 део странице у уљу. После скраћивања S и G једначина се своди на $\varrho_v a_4 + \varrho_v a_3 - \varrho_d(a_1 + a_2) = 0$ (2). Из Задатка је јасно да је $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ (3). Према услову задатка је $\dfrac{a_2}{a_1 + a_2} = 0,9$ (4). Треба одредити $x = \dfrac{a_4}{a_3 + a_4}$. Из (1) и (4) може да се одреди ϱ_d. Ако се (1) подели са $(a_1 + a_2)$ па искористи (4) добија се $\varrho_d = 0,9\varrho_v$. Ако у (2) заменимо (3) па поделимо добијену једначину са $(a_3 + a_4)$ добијамо $\varrho_v \dfrac{a_4}{a_3 + a_4} + \varrho_u \dfrac{a_3}{a_3 + a_4} - \varrho_d = 0$. Како је $\dfrac{a_4}{a_3 + a_4} = x$ може да се нађе $\dfrac{a_3}{a_3 + a_4} = 1 - x$ па имамо једначину: $\varrho_v x - \varrho_u(1 - x) - \varrho_d = 0$. Одавде налазимо $x = \dfrac{\varrho_d - \varrho_u}{\varrho_v - \varrho_u}$. Заменом бројних вреднсти налазимо $x = 0,5$.

Члановима комисије желимо пријатан дан и успешан рад!