Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

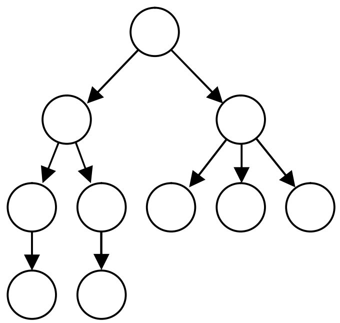
VIII разред

1. За које реалне бројеве x је вредност израза
$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023$$
минимална? Одреди тај минимум.

2. Одреди остатак при дељењу броја $2^{223}+2022^{2023}$ са 7.

3. Нека је дата коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је страница дужине 1cm. Нека је P тачка на просторној дијагонали AC_1 таква да је $BP \perp AC_1$. Израчунај површину и запремину пирамиде $ABCDP$.

4. На колико начина можеш распоредити бројеве из скупа $S = \{1, 2, ..., 10\}$ у кругове (сваки број распоређујеш у један круг), тако да стрелице показују од већег ка мањем броју?



5. На пречнику AB круга одабрана је произвољна тачка C. Тачке P и Q на датој кружници, са исте стране пречника AB, одабране су тако да је $\measuredangle ACP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QCB = 60°$. Докажи да дужина тетиве PQ не зависи од одабира тачке C на пречнику.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII разред

1. Дати израз средићемо тако што ћемо помножити прву и четврту, као и другу и трећу заграду:

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023=\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+2023\ [\textbf{5 бодова}]\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6+6)+2023\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6)+6\cdot(x^2-7x+6)+2023\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6)+6\cdot(x^2-7x+6)+9+2014\\&=((x^2-7x+6)+3)^2+2014\\&=(x^2-7x+9)^2+2014\quad [\textbf{5 бодова}]\\&\geq 2014\ [\textbf{2 бода}]\end{aligned}$$

јер је $(x^2-7x+9)^2 \geq 0$. Даље, приметимо да једначина $x^2-7x+9=0$ има два реална решења:

$$x^2-7x+9=x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+9=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$
$$=\left(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)=0\quad [\textbf{5 бодова}]$$

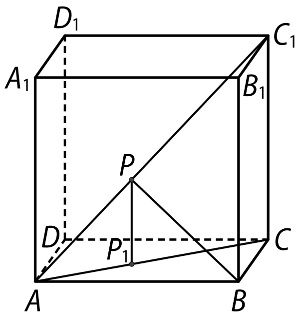
за $x_1=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ [**1 бод**] и $x_2=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ [**1 бод**], одакле следи да је минимум израза једнак 2014 [**1 бод**] и достиже се у тачкама x_1 и x_2.

2. Приметимо да је $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ [**4 бода**]. Тада је $2^{222}=(2^3)^{74}\equiv 1^{74} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$ [**3 бода**], па је $2^{223}=2^{222}\cdot 2\equiv 1\cdot 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$ [**3 бода**]. Даље је $2022 \equiv -1 \pmod 7$ [**4 бода**], па како је 2023 непаран број, то је $2022^{2023}\equiv(-1)^{2023} \pmod 7$ $2022 \equiv -1 \pmod 7$ [**3 бода**]. Коначно је $2^{223}+2022^{2023}\equiv 2+(-1) \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$, тј. тражени остатак је 1 [**3 бода**].

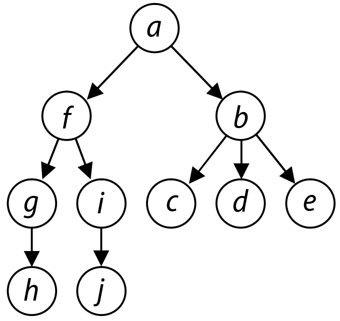
3. Приметимо да је троугао ABC_1 правоугли са страницама $AB = 1$ cm, $BC_1 = \sqrt{2}$ cm и $AC_1 = \sqrt{3}$ cm. BP је висина у том троуглу, па је $BP=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ cm [**1 бод**]. Из Питагорине теореме је $AP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm [**1 бод**]. Нека је P_1 пројекција тачке P на основу $ABCD$. Тада $P_1 \in AC$, јер се AC_1 пројектује на AC. Даље је $\Delta AP_1P \sim \Delta ACC_1$, па је $\dfrac{AP}{AC_1}=\dfrac{PP_1}{CC_1}=\dfrac{AP_1}{AC}$ [**1**

бод]. Одатле је $PP_1 = \frac{1}{3}$ cm [**2 бода**] и $AP_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ cm [**1 бод**]. Самим тим, добили смо висину пирамиде (PP_1), па је $V_{ABCDP} = \frac{1}{9}$ cm^3 [**2 бода**].

Приметимо да је $\Delta AP_1B \cong \Delta AP_1D$ по ставу СУС ($AB = AD$, $AP_1 = AP_1$, $\measuredangle BAP_1 = \measuredangle DAP_1 = 45°$). Одатле је $BP_1 = DP_1$ [**2 бода**]. По ставу СУС је $\Delta BP_1P \cong \Delta DP_1P$ ($BP_1 = DP_1$, $PP_1 = PP_1$, $\measuredangle BP_1P = \measuredangle DP_1P = 90°$). Самим тим је $BP = DP$ [**2 бода**]. Одатле су подударни и правоугли троуглови ABP и ADP по ставу ССС, па је $P_{ABP} = P_{ADP} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ cm^2 [**2 бода**]. Даље је $\Delta BCP \cong \Delta DCP$ по ставу ССС. Како је $CP_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm, то је $CP = \sqrt{CP_1^2 + PP_1^2} = 1$ cm [**2 бода**]. Дакле, троуглови BCP и DCP су једнакокраки са страницама $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm, 1 cm, 1 cm, па је њихова површина $\frac{\sqrt{5}}{6}$ cm^2 [**2 бода**]. Површина пирамиде $ABCDP$ је $P = \frac{1}{3}\cdot(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm^2 [**2 бода**].



4. Означимо кругове у којима распоређујемо бројеве као на слици. У круг a мора бити распоређен највећи број (10) [**2 бода**]. Четири броја која ћемо распоредити у кругове b, c, d и e можемо одабрати на $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ начина [**6 бодова**]. Тиме добијамо и бројеве које распоређујемо у кругове f, g, h, i, j. У круг b мора бити распоређен највећи од 4 изабрана броја. Преостала 3 броја у круговима c, d и e можемо распоредити на 6 начина [**4 бода**]. Од 5 бројева које распоређујемо у кругове f, g, h, i, j, у круг f уписујемо највећи од њих. Од преостала 4 круга g, h, i, j, бројеве које ћемо распоредити у кругове g и h можемо одабрати на 6 начина [**4 бода**], чиме смо изабрали и бројеве које распоређујемо у круговима i и j. Распоред та четири броја је једнозначно одређен. Већи од бројева које распоређујемо у кругове g и h се уписује у круг g, а мањи у круг h. Слично, већи од бројева које распоређујемо у кругове i и j се распоређује у круг i, а мањи у круг j. Коначно, укупан број тражених начина је $126 \cdot 6 \cdot 6 = 4536$ [**4 бодова**].



5. Означимо са Q' тачку на кружници симетричну тачки Q у односу на пречник AB. Из особина симетрије важи да је $\measuredangle BCQ' = \measuredangle BCQ = 60°$. Из једнакости $\measuredangle BCQ' = \measuredangle ACP = 60°$, закључујемо да су тачке P, C, и Q' колинеарне [**8 бодова**]. Троугао CQQ' је једнакокраки, са углом при врху $\measuredangle QCQ' = 120°$, па је периферијски угао над тетивом PQ једнак $\measuredangle PQ'Q = \measuredangle CQ'Q = 30°$ [**4 бода**]. Тада је централни угао над тетивом PQ једнак $\measuredangle POQ = 60°$ (са O смо означили центар датог круга), па је троугао OPQ једнакостраничан, а самим тим и дужина тетиве PQ је једнака полупречнику круга [**8 бодова**], чиме смо показали да од одабира тачке C не зависи дужина тетиве PQ.