Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

VII разред

1. Израчунај вредност израза:

$$1-n+n^2-n^3+...+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n}$$

ако је $n = 1370$.

2. У скупу целих бројева реши једначину

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 6.$$

3. Нека је дат скуп $M = \{1, 2, 3, ..., 2023\}$. Колико има трочланих подскупова скупа M код којих је један елемент једнак збиру друга два?

4. Најкраћа дијагонала правилног дванаестоугла $A_1A_2 \ldots A_{12}$ је дужине $\sqrt{6-\sqrt{3}}$ cm. Израчунај површину петоугла $A_1A_4A_5A_6A_9$.

5. У четвороуглу $ABCD$ дијагонале AC и BD су међусобно нормалне и секу се у тачки S. Означимо са M, N, P и Q подножја нормала из тачке S на AB, BC, CD и DA, редом. Докажи да важи:

$$\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SP^2}=\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SQ^2}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII разред

1. Сваки члан израза можемо записати као разломак чији је именилац $1 + n$. Како је

$$1=\frac{1+n}{1+n},\ n=\frac{n+n^2}{1+n},\ n^2=\frac{n^2+n^3}{1+n},\ \ldots,\ n^{99}=\frac{n^{99}+n^{100}}{1+n},$$

то је

$$1-n+n^2-n^3+...+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n}=$$

$$=\frac{1+n-n-n^2+n^2+n^3-n^3-n^4+...-n^{99}-n^{100}+n^{100}}{1+n}\ [\mathbf{10\ бодова}].$$

Након скраћивања супротних монома закључујемо да је вредност израза $\frac{1}{1+n}$, тј. $\frac{1}{1371}$ [**10 бодова**].

2. Дата једначина је еквивалентна са $x^2 + 2x - 6 = xy + 3y$, тј.

$$x^2 + 2x - 6 = y(x + 3).$$

Како $x = -3$ није решење, добијамо да је

$$y=\frac{x^2+2x-6}{x+3}=x-1-\frac{3}{x+3}\ [\mathbf{6\ бодова}].$$

Како $x, y \in \mathbb{Z}$, то $(x + 3) \mid 3$ [**2 бода**], па $x + 3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, тј. $x \in \{-6, -4, -2, 0\}$ [**по 2 бода** за свако тачно одређено x], па су решења $(x, y) \in \{(-6, -6), (-4, -2), (-2, -6), (0, -2)\}$ [**по 1 бод** за сваки тачно одређени пар].

3. Тражени трочлани подскупови датог скупа M су облика $\{a, b, a + b\}$. Без умањења општости можемо претпоставити да је

$$1 \le a < b < a + b \le 2023.$$

I начин. Следи да је $2a < a + b \le 2023$, односно $2a \le 2022$, дакле $a \in \{1, 2, 3, ..., 1010, 1011\}$ [**2 бода**]. За фиксирано a, b може да буде $a + 1$, $a + 2$, ..., $2023 - a$, [**2 бода**] дакле за једно фиксирано a постоји $(2023 - a) - (a + 1) + 1 = 2023 - 2a$ различитих могућности за b [**5 бодова**].
Закључујемо да је укупан број тражених подскупова

$(2023 - 2 \cdot 1) + (2023 - 2 \cdot 2) + (2023 - 2 \cdot 3) + ... + (2023 - 2 \cdot 1011) =$ [**6 бодова**]

$= 1011 \cdot 2023 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 1011)$
$= 1011 \cdot 2023 - 1011 \cdot 1012 = 1011^2$ [**5 бодова**] $= 1022121$.

II начин. Како су најмање вредности за a и b једнаке 1 и 2, то важи да $a + b \in \{3, 4, 5, ..., 2022, 2023\}$, односно може да има 2021 различиту вредност [**2 бода**].

Ако је n непаран број, тада од бројева 1, 2, ..., $n - 1$ можемо направити $(n - 1) : 2$ парова различитих бројева чији је збир n [**1 бод**].

Слично, ако је n паран број, тада од бројева 1, 2, ..., $n - 1$ можемо направити $(n - 2) : 2$ парова различитих бројева чији је збир n [**1 бод**].

У оба случаја групишемо најмањи и највећи број низа, након тога најмањи и највећи од преосталих бројева, итд.

Посматрајући бројеве од 3 до 2023 закључујемо да:

- бројеве 3 и 4 можемо представити на 1 начин као збир два мања различита броја;
- бројеве 5 и 6 можемо представити на 2 начина као збир два мања различита броја;

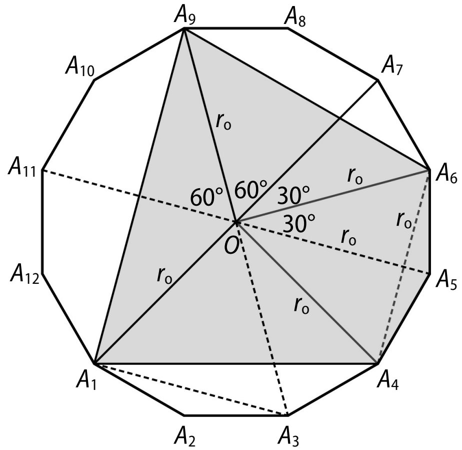
...

- бројеве 2021 и 2022 можемо представити на 1010 начина као збир два мања различита броја;
- број 2023 можемо представити на 1011 начина као збир два мања различита броја [**5 бодова** за све правилно изнете претходне закључке].

Дакле, укупан број тражених подскупова је:

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 1010) + 1011 \text{ [\textbf{6 бодова}]} =$$
$$= 1010 \cdot 1011 + 1011$$
$$= 1011^2 \text{ [\textbf{5 бодова}]} = 1022121.$$

4. Нека је O центар описане кружнице дванаестоугла. Централни угао правилног дванаестоугла једнак је 30°. Троугао A_1OA_3 је једнакокрак, а како је његов угао при врху једнак 60°, то је дужина најкраће дијагонале (A_1A_3) једнака полупречнику описане кружнице r_o [**3 бода**].



Површина траженог петоугла једнака је збиру површина три троугла и једног делтоида тј.

$$P(A_1A_4A_5A_6A_9) = P(A_1A_4O) + P(A_4A_5A_6O) + P(A_6A_9O) + P(A_9A_1O) \text{ [\textbf{3 бода}]}.$$

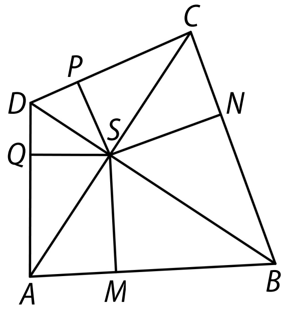
Напомена. Због читљивости записа, са $P(ABC)$ означили смо површину многоугла чија су темена дата у загради.

Троуглови A_1A_4O и A_6A_9O су подударни, једнакокраки правоугли троуглови чије су катете дужине r_o [**3 бода**]. Дијагонале делтоида $OA_4A_5A_6$ су такође дужина r_o [**3 бода**]. На крају, површина троугла A_9A_1O једнака је површини једнакостраничног троугла странице r_o [**3 бода**], па је тражена површина једнака:

$$2 \cdot \frac{r_o^2}{2} + \frac{r_o^2}{2} + \frac{r_o^2\sqrt{3}}{4} = r_o^2 \cdot \frac{6+\sqrt{3}}{4} = \left(\sqrt{6-\sqrt{3}} \text{ cm}\right)^2 \cdot \frac{6+\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{33}{4} \text{ cm}^2 = 8,25 \text{ cm}^2 \text{ [\textbf{5 бодова}]}.$$

5. Покажимо да у правоуглом троуглу чије су дужине катета a и b и дужина хипотенузине висине h, важи $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Ако са c означимо дужину хипотенузе, тада је $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, тј. $ab = ch$. Сада је

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{c^2h^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ [\textbf{10 бодова}]}.$$



Примењујући ово тврђење на правоугле троуглове *SAB*, *SBC*, *SCD*, *SDA*, добијамо

$$\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SP^2}=\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}\right)+\left(\frac{1}{SC^2}+\frac{1}{SD^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{SC^2}+\frac{1}{SB^2}\right)+\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SD^2}\right)=\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SQ^2}$$ [**10 бодова**].