Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа

13.05.2023.

VI разред

1. Реши једначину:

$$2023\cdot\frac{27\frac{2}{2023}-17\frac{1}{2023}}{20:0,01-1\frac{1}{3}x}=\frac{2,023:0,0001+1}{148}.$$

2. Конструиши троугао ABC чији је обим 14 cm, а мере два унутрашња угла $52°\ 30'$ и $67°\ 30'$.

3. Одреди све троцифрене природне бројеве који имају особину да ако им се било које две цифре замене са било које две произвољне цифре (преостала цифра броја остаје на свом месту) тако добијени троцифрени број није дељив са 113.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) мера угла при врху је 108°. Нека је E тачка пресека симетрале угла BAC и странице BC. Ако је дуж CD висина која одговара основици овог троугла, докажи да је $AE = 2CD$.

5. Нека су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви и $n > 18$ ($n\in N$). Докажи да постоји барем 8 различитих природних бројева који су делиоци броја n.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI разред

1. $$2023\cdot\frac{27\frac{2}{2023}-17\frac{1}{2023}}{20:0,01-1\frac{1}{3}x}=\frac{2,023:0,0001+1}{148}.$$

$$2023\cdot\frac{10\frac{1}{2023}}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20230+1}{148}\quad [\textbf{6 бодова}]$$

$$\frac{2023\cdot\frac{20231}{2023}}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20231}{148}$$

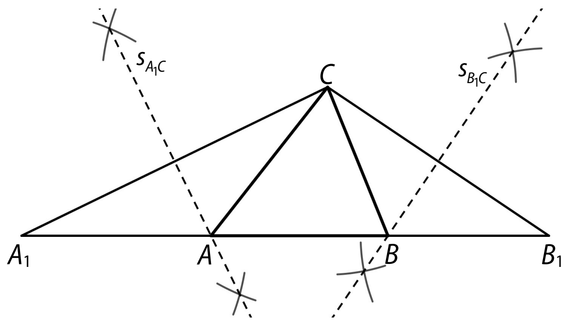
$$\frac{20231}{2000-1\frac{1}{3}x}=\frac{20231}{148}\quad [\textbf{6 бодова}]$$

$$2000-\frac{4}{3}x=148\quad [\textbf{4 бода}]$$

$$\frac{4}{3}x=2000-148$$

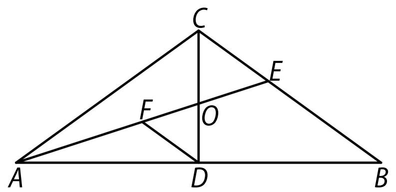
$$x=1389\quad [\textbf{4 бодова}]$$

2. Нека је дат троугао ABC у коме је $\measuredangle BAC = \alpha = 52°\ 30'$ и $\measuredangle ABC = \beta = 67°\ 30'$. Продужимо страницу AB преко тачке A до A_1 и преко тачке B до B_1 тако да је $AA_1 = AC$ и $BB_1 = BC$. Тада је дужина дужи A_1B_1 једнака обиму троугла ABC и једнака је 14 cm [**3 бода**]. Троуглови A_1AC и B_1BC су једнакокраки са основицама A_1C и B_1C и спољашњим угловима код темена при врху α и β, па је $\measuredangle AA_1C = \frac{1}{2}\alpha = 26°\ 15'$ (четвртина угла од 105°) [**3 бода**]. Аналогно је и $\measuredangle BB_1C = \frac{1}{2}\beta = 33°\ 45'$ (четвртина угла од 135°) [**3 бода**]. Темена A и B налазе се на симетралама страница A_1C и B_1C јер су троуглови A_1AC и B_1BC једнакокраки [**3 бода**]. Сада можемо конструисати троугао ABC:
- На произвољној правој p нанесемо растојање од 14 cm чиме смо одредили тачке A_1 и B_1;
- У тачки A_1 нанесемо угао од $26°\ 15'$ [**2 бода**];
- У тачки B_1 нанесемо угао од $33°\ 45'$ [**2 бода**];
- У пресеку кракова нанешених углова који су ван праве p налази се тачка C;
- У пресеку симетрале дужи A_1C и праве p добијамо теме A [**2 бода**];
- У пресеку симетрале дужи B_1C и праве p добијамо теме B [**2 бода**].



3. Сви троцифрени бројеви дељиви са 113 су: 113, 226, 339, 452, 565, 678, 791 и 904 [**2 бода**]. Код ових бројева на месној вредности стотина не појављује се само цифра 8 (цифру 0 не разматрамо пошто добијени број треба да буде троцифрен) [**2 бода**]. На месној вредности десетица се не појављују цифре 4 и 8 [**2 бода**], а на месној вредности јединица се не појављују цифре 0 и 7 [**2 бода**]. Тражени бројеви онда на свакој месној вредности морају имати баш цифре које се не појављују у бројевима дељивим са 113 јер заменом било које две цифре увек ће имати једну цифру која се не јавља код бројева дељивих са 113. Дакле, тражени бројеви су 840, 847, 880 и 887 [сваки тачно написан број **по 3 бода**. За сваки погрешно одређен број одузети по 2 бода. Укупан број бодова не може бити негативан].

4. Нека је $CD \cap AE = \{O\}$. Како је $\measuredangle ACB = 108°$, следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB = 36°$, па је $\measuredangle CAE = 18°$. Одавде следи да је $\measuredangle AEC = 54°$. Како је висина CD и симетрала угла ACB, следи да је $\measuredangle OCE = 54°$, па је троугао OCE једнакокраки ($OC = OE$) [**5 бодова**]. Нека је дуж DF средња линија троугла ABE ($F \in AE$). Тада је $DF \parallel BE$, па је $\measuredangle ODF = \measuredangle OFD = 54°$. Следи да је и троугао OFD једнакокраки, па је $OF = OD$ [**5 бодова**]. Сада је $CD = OC + OD = OE + OF = EF$ [**5 бодова**]. Како је DF средња линија троугла ABE, тачка F је средиште странице AE, па је $AE = 2EF$. Дакле, $AE = 2CD$ [**5 бодова**].



5. Како је $n + 1$ прост већи од 19, то је он непаран, па је n паран број [**2 бода**]. Такође је један од три узастопна броја $n - 1$, n и $n + 1$ дељив са 3, па како су $n - 1$ и $n + 1$ прости већи од 3, то $3 \mid n$ [**3 бода**].

1) Ако n има још неки прост делилац p различит од 2 и 3, онда су неки од делиоца броја n и бројеви 1, 2, 3, 6, p, $2p$, $3p$ и $6p$, тј. n има бар 8 делилаца [**7 бодова**].

2) Ако n нема других делилаца осим 2 и 3, онда је $n = 2^a3^b$, где су a и b природни бројеви [**1 бод**]. Број делилаца овог броја је $(a + 1)(b + 1)$ [**1 бод**]. Он је мањи од 8 само у случајевима $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ [**4 бода**]. Но, у сва три случаја је $n \leq 18$ (у питању су бројеви 6, 12 и 18) [**2 бода**]. Дакле, и у овом случају n има бар 8 делилаца.