2. Колико има шестоцифрених природних бројева дељивих са 5, који се записују само цифрама 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (цифре се не понављају), при чему цифре 1 и 2 не могу бити једна до друге?

3. Основа тростране пирамиде $ABCS$ је једнакокрако-правоугли троугао ABC, са правим углом у темену B, а врх S се нормалном пројекцијом на раван основе пројектује у тачку D, која је средиште ивице AC. Ако је бочна страна ACS правоугли троугао са правим углом код темена S и $SD = \sqrt{2}$ cm, израчунај површину пирамиде $ABCS$.

4. У скупу целих бројева реши једначину $y^4 + x = xy + 8$.

5. Да ли је могуће бројеве 3, 3^2, ..., 3^{n-1}, 3^n поделити у три групе (не обавезно са истим бројем елемената) тако да је производ елемената сваке групе исти, уколико је: а) $n = 2022$; б) $n = 2023$?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
14.05.2022. године

VI разред

1. На пијаци један продавац продаје јабуке, крушке и мандарине на комад. На његову тезгу истовремено долазе два купца. У том тренутку продавац има 227 комада воћки. Први купац је купио $\frac{2}{3}$ свих јабука, $\frac{3}{10}$ свих крушака и $\frac{5}{7}$ свих мандарина. Други купац је купио $\frac{1}{11}$ свих јабука, $\frac{1}{4}$ свих крушака и $\frac{1}{5}$ свих мандарина. Колико комада јабука, крушака и мандарина су купили први и други купац? Колико комада јабука, крушака и мандарина је имао продавац пре њихове куповине?

2. Докажи да је $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+...+\frac{1}{2019\cdot 2022}<\frac{1}{9}$.

3. У троуглу ABC је $\measuredangle B = 80°$. Нека је D тачка странице BC таква да је $\measuredangle BDA = 70°$ и $AB + BD = AC$. Одреди меру угла ACB.

4. Дата су четири природна броја. Израчунавањем свих могућих ненегативних разлика ових бројева добијамо 0, 2, 3, 5. Одреди о којим бројевима је реч ако је познато да је збир два већа броја три пута већи од збира два мања броја.

5. У троуглу ABC важи $BC = 2AC$. Нека је D тачка странице BC таква да важи $\measuredangle CAD = \measuredangle ABC$. Симетрала спољашњег угла код темена C сече полуправу AD у тачки E. Докажи да је $AE = AB$.

VII разред

1. Цифра десетица квадрата приподног броја је непарна. Докажи да је цифра јединица тог квадрата једнака 6.

2. Дат је трапез $ABCD$ у који је уписана кружница која дужу основицу AB додирује у тачки G тако да је $AG = 15$ cm и $BG = 10$ cm, а краћа основица $CD = 8$ cm. Израчунај површину трапеза $ABCD$.

3. Одреди све парове целих бројева (m, n) таквих да је $3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4$.

4. У унутрашњости правилног шестоугла странице 2 cm дате су 193 тачке, међу којима не постоје три колинеарне, а које су обојене у 4 боје. Докажи да постоје три истобојне тачке које представљају темена троугла површине не веће од $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

5. У унутрашњости једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) дата је тачка M таква да је $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB$. На дужи AM одабрана је тачка N таква да је $\measuredangle CNM = \measuredangle ACB$. Докажи да је $CN = BM + MN$.

VIII разред

1. Нека су x, y, z реални бројеви, различити од 0, такви да важи $x + y + z = 2025$ и $xy + yz + zx = xyz$. Одреди вредност израза $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y}$.

2. а) Одреди које остатке при дељењу са 11 дају бројви облика n^5 где је n природан број.
б) Докажи да једначина $x^5 + y^5 + z^5 = 2022^{2022}$ нема решења у скупу природних бројева.

3. Нека је дата правилна тространа призма $ABCA'B'C'$. Нека је D тачка на страници AA', таква да је $AD : DA' = 4 : 1$. Нека су E и F тачке осносиметричне теменима B' и C' у односу на праву BC. У ком односу раван DEF дели запремину призме.

4. Дате су тачке A (0, 4) и $B(-1, 5)$. На правој $y = -x$ одреди тачку P тако да збир дужина дужи AP и BP буде минималан.

5. Седморица гусара су поделили извесну количину златника. Делили су тако да је свако узимао онолико колики је збир цифара броја златника пре него што је он узимао. Свако је узимао тачно два пута и на крају није остао ни један златник. Сви су добили исту количину златника, изузев главног гусара који је добио више.
а) Колико златника је било?
б) Колико златника је добио главни гусар, а колико остали?
в) Који је по реду узимања био главни гусар?

4. Полазну једначину можемо записати у облику $x(y-1) = y^4 - 8$, а како је $y \neq 1$, добијамо $x = \frac{y^4-8}{y-1} = \frac{y^4-1}{y-1} - \frac{7}{y-1} = (y^2+1)(y+1) - \frac{7}{y-1}$. Из услова $x \in \mathbb{Z}$, важи $(y-1)|7$, па $y-1 \in \{-7, -1, 1, 7\}$. Решења су $(x, y) \in \{(-184, -6), (8, 0), (8, 2), (584, 8)\}$.

5. Производ свих n бројева је $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Ако бројеви могу да се поделе у три групе тако да је производ у свакој групи исти (на пример једнак је A), онда мора да буде $A^3 = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Закључујемо да $3 | \frac{n(n+1)}{2}$. Како $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$ није дељиво са 3, закључујемо да за $n = 2023$ није могуће поделити бројеве на тражени начин. Покажимо да је то могуће за $n = 2022$. Да бисмо ово показали потребно је конструисати барем једну поделу датих бројева на три групе тако да је производ бројева у све три групе једнак, односно да је збир изложилаца у све три групе једнак. Бројеве 1, 2, 3, ..., 2021, 2022 можемо поделити у скупове од по шест узастопних бројева на следећи начин: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, ..., {2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022}. У сваком од ових скупова, збир првог и шестог; другог и петог, трећег и четвртог записаног броја је једнак. Дакле, ако из сваког скупа у по једну групу ставимо по један пар поменутих бројева, добићемо тражену поделу.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ

VI разред

1. Означимо редом са x, y и z број јабука, крушака и мандарина које је продавац имао у тренутку доласка купаца. Како су $\frac{2}{3}x$, $\frac{3}{10}y$ и $\frac{5}{7}z$ природни бројеви, то $3 | x$, $10 | y$, $7 | z$. Слично, како су $\frac{1}{11}x$, $\frac{1}{4}y$ и $\frac{1}{5}z$ природни бројеви, то $11 | x$, $4 | y$, $5 | z$. Одатле закључујемо да

$$\text{НЗС}(3, 11) \,|\, x, \quad \text{НЗС}(10, 4) \,|\, y, \quad \text{НЗС}(7, 5) \,|\, z,$$

тј. $33 | x$, $20 | y$, $35 | z$. Нека је $x = 33x_1$, $y = 20y_1$, $z = 35z_1$, па како је $x + y + z = 227$, то је $33x_1 + 20y_1 + 35z_1 = 227$. Приметимо да се $20y_1$ завршава са 0, а $35z_1$ са 0 или 5. Посматраћемо два случаја.

1°) Ако се $35z_1$ завршава са 0, онда се $33x_1$ завршава са 7, а самим тим x_1 се завршава са 9, што је немогуће јер је већ $9 \cdot 33 = 297 > 227$.

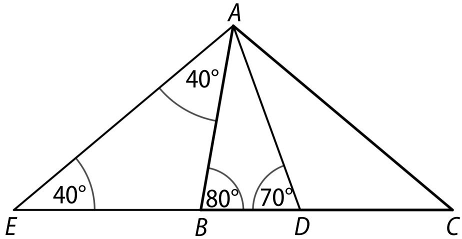
2°) Ако се $35z_1$ завршава са 5, онда се $33x_1$ завршава са 2, а самим тим x_1 се завршава са 4. Једина могућа опција је $x_1 = 4$. Онда је $20y_1 + 35z_1 = 95$. Дељењем обе стране са 5 добијамо $4y_1 + 7z_1 = 19$. Једино решење је $(y_1, z_1) = (3, 1)$.

Дакле, $x = 132$, $y = 60$, $z = 35$, па је продавац пре њихове куповине имао 132 јабуке, 60 крушака и 35 мандарина. Први купац је купио 88 јабука, 18 крушака и 25 мандарина. Други купац је купио 12 јабука, 15 крушака и 7 мандарина.

2. Како је $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ и $a\cdot k<a$ за $a>0$ и $0<k<1$, важи:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}+...+\frac{1}{2019\cdot2022}&=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{673\cdot674}\right)\\&=\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{673}-\frac{1}{674}\right)\\&=\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{674}\right)<\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

3. Нека је E тачка праве CB таква да је $EB = BA$ и $C–B–E$. Тада је из $\triangle BAD$: $\measuredangle BAD = 180° – 80° – 70° = 30°$, па је $\measuredangle EAD = 40° + 30° = 70° = \measuredangle EDA$ и $\triangle AED$ је једнакокрак ($EA = ED$). Из $AE = EB + BD = AB + BD = AC$ следи да је и $\triangle AEC$ једнакокрак и $\measuredangle ACB = \measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \measuredangle AEB = 40°$.



4. Нека су тражени бројеви $a \le b \le c \le d$. Нека су дате разлике

$$b – a, c – a, d – a, c – b, d – b, d – c.$$

Оне узимају вредности из скупа {0, 2, 3, 5}. Неке од њих су једнаке, и важи да је $d – a = 5$, као разлика највећег и најмањег броја. Разликујемо три случаја:

а) $a = b < c < d$.

Тада је $b – a = 0$, $d – a = d – b$, $3(a + b) = c + d$, па је $6a = c + a + 5$, тј. $4a = c – a + 5$. Како $c – a + 5$ мора бити дељиво са 4, то значи да је $c – a = 3$, одакле је $a = b = 2$, $c = 5$, $d = 7$.

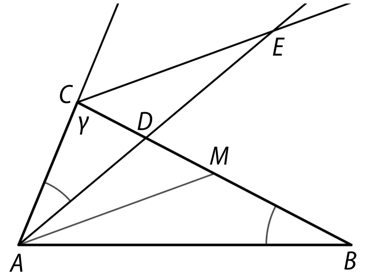
б) $a < b = c < d$.

Тада је $b – c = 0$, $d – a = 5$, $c – a = b – a$. Из $3(a + b) = c + d$ је $3(a + b) = a + b + 5$, односно $2(a + b) = 5$, што је немогуће.

в) $a < b < c = d$.

Тада је $d – c = 0$, $d – a = c – a = 5$, $3(a + b) = c + d = 2(a + 5)$. Дакле, $4b = b – a + 10$, па $b – a + 10$ мора бити дељиво са 4, што значи да је $b – a = 2$, па је $a = 1$, $b = 3$, $c = d = 6$.

5. Нека је M средиште странице BC. Тада је $AC = CM = MB$. Ако је $\measuredangle ACM = \gamma$, тада је $\measuredangle AMC = \measuredangle CAM = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$, па је $\measuredangle AMB = 90° + \dfrac{\gamma}{2}$. Такође је $\measuredangle ACE = \gamma + \dfrac{180^\circ-\gamma}{2} = 90° + \dfrac{\gamma}{2} = \measuredangle AMB$. Сада је $\triangle ACE \cong \triangle BMA$ (УСУ), одакле је $AE = AB$.



VII разред

1. Нека је посматрани природни број облика $n = 10y + x$ (x, y су цифре). Тада је $n^2 = 100y^2 + 20xy + x^2$, одакле следи да је цифра десетица броја n^2 непарна само ако је и цифра десетица броја x^2 непарна, а то је могуће само ако је $x = 4$ или $x = 6$. У оба случаја цифра јединица броја x^2, па и броја n^2, је 6.

2. Означимо са E, J и I тачке додира уписане кружнице и страница AD, CD и BC, редом, и нека су DF и CH висине трапеза (h). Ако означимо $DJ = x$, тада је $DJ = DE = FG = x$, $CJ = CI = HG = 8 - x$, $AE = AG = 15$, $BI = BG = 10$ (све величине су изражене у центиметрима). Троуглови AFD и BHC су правоугли и важи $DA^2 - AF^2 = DF^2 = CH^2 = CB^2 - BH^2$, одакле добијамо

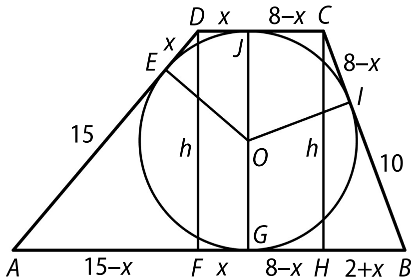
$$DA^2 - AF^2 = CB^2 - BH^2$$

$$(DE + ED)^2 - (AG - GF)^2 = (BI + IC)^2 - (BG - GH)^2$$

$$(15 + x)^2 - (15 - x)^2 = (18 - x)^2 - (2 + x)^2$$

Решавањем ове једначине добијамо да је $x = \dfrac{16}{5}$ cm, одакле је $h = 8\sqrt{3}$ cm, па је

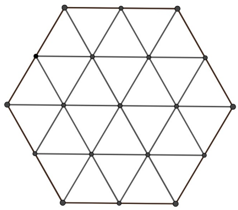
површина $P = \dfrac{AB \cdot CD}{2} \cdot h = 132\sqrt{3}$ cm^2.



3. Помножимо са 12 обе стране једнакости и ослободимо се заграда како бисмо формирали квадрат бинома. Тада добијамо: $36m^2 - 84m + 36n^2 - 84n = -48$, што је еквивалентно једначини $(6m - 7)^2 + (6n - 7)^2 = 50$. Број 50 се као збир два квадрата може написати на три начина $1 + 49$, $49 + 1$ и $25 + 25$.

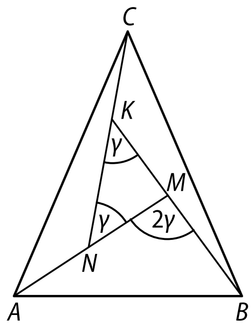
У првом случају (1 + 49) добијамо да је $6m - 7 = 1$ или $6m - 7 = -1$ и $6n - 7 = 7$ или $6n - 7 = -7$. Као једино целобројно решење добијамо $(m, n) = (1, 0)$.
Аналогно, у другом случају добијамо решење $(m, n) = (0, 1)$.
У трећем случају добијамо $6m - 7 = 5$ или $6m - 7 = -5$ и $6n - 7 = 5$ или $6n - 7 = -5$, па је овде једино решење $(m, n) = (2, 2)$.
Дакле, скуп целобројних решења једначине је $(m, n) \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 2)\}$.

4. Најпре, приметимо да по Дирихлеовом принципу (193 : 4 = 48 (1)) имамо бар 49 тачака које су исте боје. Поделимо шестоугао на 6 једнакостраничних троуглова, а затим сваки једнакостранични троугао на 4 мања једнакостранична троугла као на слици (укупно 24 дела). Тада се по Дирихлеовом принципу у неком од тих троуглова налазе бар 3 истобојне тачке (49 : 24 = 2 (1)).



Како је површина троугла у којем се оне налазе једнака $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2 (једнакостранични троугао странице 1 cm) и како по услову задатку произвољне три тачке образују троугао, те три истобојне тачке образују троугао површине не веће од $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

5. Нека је K пресечна тачка праве BM и дужи CN. Тада је $\triangle KMN$ једнакокраки ($\measuredangle KNM + \measuredangle NKM = \measuredangle NMB$), па је $MN = MK$ и $\measuredangle CKB = \measuredangle CNA$ (спољашњи углови једнакокраког троугла). Ако означимо $\measuredangle BCK = x$, тада је $\measuredangle CAN = 180° - (180° - \gamma) - (\gamma - x) = x$, па је $\measuredangle BCK = \measuredangle CAN$. Из једнакости два пара углова троуглова BCK и CAN следи једнакост и трећег пара, па су ови троуглови и подударни (УСУ). Из ове подударности је $CN = BK = BM + MK = BM + MN$.



VIII разред

1. Важи да је:

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=\frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)}{xyz}$$
$$=\frac{xy(2025-z)+yz(2025-x)+zx(2025-y)}{xyz}$$
$$=\frac{2025(xy+yz+zx)-3xyz}{xyz}=\frac{2025xyz-3xyz}{xyz}=\frac{2022xyz}{xyz}=2022.$$

2. а) Могући остаци при дељењу броја n са 11 су: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, а остаци при дељењу броја n^5 су –1, 0, 1.

Остатак при дељењу броја n	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
Остатак при дељењу броја n^5	–1	–1	–1	1	–1	0	1	–1	1	1	1

б) Како су остаци при дељењу петог степена природног броја са 11 једнаки –1, 0 и 1, то су могући остаци при дељењу збира $x^5 + y^5 + z^5$ једнаки –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. То значи да остаци не могу бити 4, 5, 6 и 7. Међутим како је $2022^{2022} \equiv 4 \pmod{11}$, то ова једначина нема решења у скупу N.

3. Нека је a основна ивица, а H висина призме $ABCA'B'C'$. Запремина призме $ABCA'B'C'$ је $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H.$ Раван DEF дели призму $ABCA'B'C'$ на два дела, од којих је један тространа пирамида $DAMN$ (види слику). Нека је K тачка на правој AA', симетрична тачки A' у односу на тачку A. Тада су троуглови ABC и KEF подударни. Нека дужи DE и DF секу ивице AB и AC редом у тачкама M и N. Троуглови DKE и DAM су слични (имају заједнички угао код темена D, а углови код темена A, односно K, су оба права). Троугао AMN је једнакостранични. Означимо његову страницу са x. Одатле је $a : x = KD : AD$, односно $a:x=\left(\dfrac{9}{5}H\right):\left(\dfrac{4}{5}H\right),$ па је $x=\dfrac{4}{9}a.$

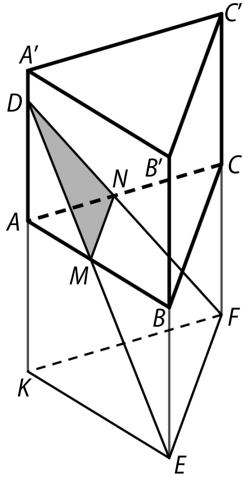
Тада је запремина пирамиде $DAMN$ једнака

$$V_1=\frac{\left(\frac{4}{9}a\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\frac{4}{5}H}{3}=\frac{16}{1215}a^2H\sqrt{3},$$

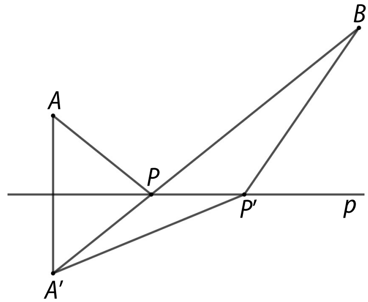
а запремина преосталог дела призме

$$V_2=V-V_1=\frac{1151}{4860}a^2H\sqrt{3}.$$

Дакле, тражени однос запремина је $V_1 : V_2 = 64 : 1151$.



4. Нека је дата права p и тачке A и B ван ње. Доказаћемо да је збир дужина дужи AP и BP минималан ако је $\{P\} = p \cap A'B$, где је A' тачка симетрична тачки A у односу на праву p. Нека је $P' \neq P$ тачка праве p. Тада је $AP' + P'B = A'P' + P'B' > A'B = A'P + PB = AP + BP$.



Тачка симетрична тачки A у односу на праву $y = -x$ је тачка $A'(-4, 0)$. Једначина праве $A'B$ је $y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$, а њен пресек са правом $y = -x$ је тачка $P\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

5. Збир цифара природног броја при дељењу са 9 даје исти остатак као и сам број при дељењу са 9. Следи, ако од неког броја одузимамо збир његових цифара добијемо број дељив са 9. Шесторица гусара су добили исти број златника и да је тај број дељив са 9. Једини позитиван природан број који је једнак збиру својих цифара и дељив са 9 је 9. Дакле, последњи гусар узео је последњих 9 златника. Сад лако можемо конструисати бројеве златника од којих је сваки гусар узимао онолико колики је збир цифара броја златника.

Редни број гусара	7	6	5	4	3	2	1
Број златника у другом кругу узимања	9	18	27	36	45	54	63
Број златника узиман у другом кругу	9	9	9	9	9	9	9
Број златника у првом кругу узимања	72	81	99	108	117	126	135
Број златника узиман у другом кругу	9	9	18	9	9	9	9

Петом гусару у првом кругу није могло остати 90 златника, јер је збир цифара троцифреног броја највише 27, а бројеви од 91 до 90 + 27 = 117 дељиви са девет (99, 108, 117) умањени за збир цифара дају бројеве 99 − 18 = 81, 108 − 9 = 99 и 117 − 9 = 108. Закључујемо да је:

а) укупно било 135 златника;

б) главни гусар добио 27 златника, а остали 18;

в) главни гусар био пети у реду узимања.