ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
16.05.2021. године

VI разред

1. У разностраничан троугао ABC уписан је круг k чији је центар тачка O. Конструисане су праве p и q, које садрже тачку O, такве да је $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Права p сече страницу AB у тачки M, а права q сече страницу AB у тачки N. Докажи да је обим троугла OMN једнак дужини странице AB.

2. а) Да ли постоје четири различита природна броја таква да је збир свака три од њих прост број?
б) Да ли постоји пет различитих природних бројева таквих да је збир свака три од њих прост број?

3. Збир цифара природног броја n једнак је збиру цифара броја $5n$. Докажи да је број n дељив са 9.

4. Колико различитих решења има следећи бројевни ребус (истим словима одговарају исте, а различитим словима различите цифре)?

$$\begin{array}{r} A\ B\ B\ C\ B \\ +\ B\ C\ A\ D\ A \\ \hline D\ B\ D\ D\ D \end{array}$$

5. У троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 45°$. Нека је M тачка на страници AC таква да је $MC = 2AM$ и $\measuredangle ABM = 15°$. Одреди меру угла ACB.

VII разред

1. Одреди остатак при дељењу броја $25 \cdot 3^{2021}$ бројем $4 \cdot 3^{2020}$.

2. Нека је $ABCDEF$ правилни шестоугао странице 1 cm. Означимо са X, Y и Z редом средишта страница AB, CD, EF. Израчунај обим и површину шестоугла који се добија као пресек троуглова ACE и XYZ.

3. Одреди све целе бројеве n такве да је број $n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ прост.

4. Да ли се природни бројеви од 1 до 15 могу поделити у два скупа A и B тако да се у скупу A налазе два, а у скупу B тринаест бројева и да је збир бројева скупа B једнак производу бројева из скупа A?

5. Странице троугла ABC су $AB = 125$ cm, $AC = 117$ cm, $BC = 120$ cm. Симетрала унутрашњег угла код темена A сече дуж BC у тачки L, док симетрала унутрашњег угла код темена B сече AC у тачки K. Нека су M и N подножја нормала из тачке C редом на BK и AL. Одреди дужину дужи MN.

VIII разред

1. Углови на већој основици трапеза су по 60°, а његов обим је 200cm. Одреди дужину веће основице тако да површина трапеза буде максимална.

2. Правилна шестострана призма има основну ивицу дужине 1 cm и висину дужине 2 cm. Одреди број троуглова чија су темена уједно и темена дате призме, а све странице су различитих дужина.

3. Одреди све тројке простих бројева (a, b, c) за које важи неједнакост

$$abc < ab + bc + ca.$$

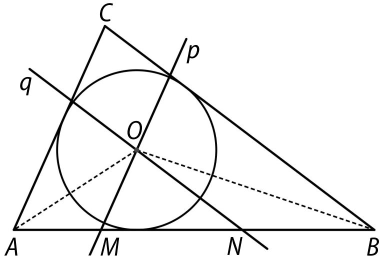
4. Нека су A и B две тачке на кружници $k_1(C, r)$ које нису дијаметрално супротне. Права p садржи тачку C и паралелна је правој AB, а права q садржи тачку A и паралелна је правој BC. Нека је D пресечна тачка праве q и кружнице $k_2(A, AB)$. Докажи да се праве p и DB секу на кружници k_1.

5. Да ли се могу одредити цифре a и b ($a \neq 0$) такве да је дванаестоцифрени број $\overline{abbaabbaabba}$ квадрат природног броја?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ

VI разред

1. Како је права AO симетрала угла BAC, то је $\measuredangle MAO = \measuredangle CAO = \measuredangle AOM$, па је троугао AOM једнакокрак, одакле је $AM = OM$. Слично се доказује да је троугао BON једнакокрак, па је $BN = ON$. Дакле, $AB = AM + MN + NB = OM + MN + NO$.



2. а) Постоје. Такве четворке су, на пример, (1, 3, 7, 9), (3, 7, 9, 31), итд.
б) Не постоје. Сваки број при дељењу са 3 даје остатак 0, 1 или 2. Ако међу пет бројева има три броја који при дељењу са 3 дају остатке 0, 1 и 2 онда је њихов збир дељив са 3, а ако нема онда по Дирихлеовом принципу међу њима има 3 броја која дају исти остатак при дељењу са 3, па је њихов збир дељив са 3.

3. Претпоставимо да n није дељиво са 9, већ да је његов остатак при дељењу са 9 једнак r ($0 < r < 9$). Остатак при дељењу броја броја $5n$ са 9 је различит од r.

остатак при дељењу броја n са 9	1	2	3	4	5	6	7	8
остатак при дељењу броја $5n$ са 9	5	1	6	2	7	3	8	4

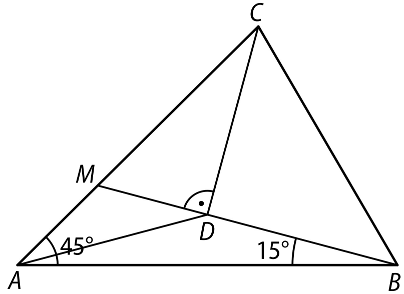
Како сваки природан број даје исти остатак при дељењу са 9 као и збир његових цифара, следи да збирови цифара броја n и броја $5n$ дају различите остатке при дељењу са 9, што је у супротности са условом задатка. Дакле, број n јесте дељив са 9.

4. Како је $A + B = D < 10$ и $C + D = D$, то је $C = 0$ (не може бити 9 јер не постоји пренос 1 са месне вредности јединица). Цифра D може имати вредности {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Тада A и B могу имати следеће вредности

D	$A + B$
3	1 + 2, 2 + 1
4	1 + 3, 3 + 1
5	1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1
6	1 + 5, 2 + 4, 4 + 2, 5 + 1
7	1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1
8	1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 5 + 3, 6 + 2, 7 + 1
9	1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 1

Дакле, постоје укупно 32 решења.

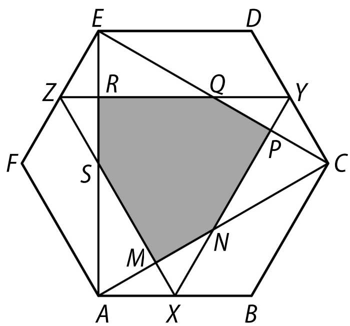
5. Нека је D подножје нормале из темена C на MB. Из $\triangle ABM$ закључујемо да је $\measuredangle AMB = 120°$, одакле је $\measuredangle CMD = 60°$, па у $\triangle MCD$ важи да је $DM = \frac{1}{2}MC = AM$. Како је $\triangle AMD$ једнакокрак, то је $\measuredangle MAD = \measuredangle MDA = 30°$, па је и $\triangle ADC$ једнакокрак, одакле је $AD = CD$. Како је $\measuredangle DAB = 45° - 30° = 15°$, следи да је и $\triangle ABD$ једнакокрак и $AD = BD$. Закључујемо да је $CD = BD$, тј. катете правоуглог троугла BDC су једнаке, па је $\measuredangle DCB = 45°$. Тражени угао је $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD + \measuredangle DCB = 30° + 45° = 75°$.



VII разред

1. Како је $25 \cdot 3^{2021} = 75 \cdot 3^{2020} = 72 \cdot 3^{2020} + 3 \cdot 3^{2020}$, то је тражени остатак при дељењу броја $25 \cdot 3^{2021}$ бројем $4 \cdot 3^{2020}$ једнак $3 \cdot 3^{2020} = 3^{2021}$.

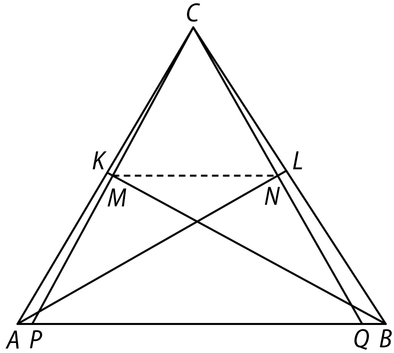
2. Нека је $MNPQRS$ тражени шестоугао. Дуж XY је средња линија трапеза $ABCD$, па је $XY \parallel AD \parallel BC$ и $XY = \frac{3}{2}$ cm. Дуж YQ је средња линија $\triangle ECD$, па је $YQ \parallel ED \parallel FC$ и $YQ = \frac{1}{2}$ cm. Како је $\measuredangle QYP = 60°$, то је $YP = \frac{1}{2}YQ = \frac{1}{4}$ cm. На исти начин добијамо да је $NX = ZS = \frac{1}{2}$ cm и $MX = ZR = \frac{1}{4}$ cm, па је тражени обим $O = 3PN + 3NM = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\text{ cm} - \frac{1}{2}\text{ cm} - \frac{1}{4}\text{ cm}\right) + 3 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}\text{ cm} = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}$ cm. Површина шестоугла $MNPQRS$ једнака је $P_{\Delta XYZ} - 3P_{\Delta QPY} = \frac{15}{32}\sqrt{3}\text{ cm}^2$.



3. Како је $n^3 - 2n^2 + 2n - 4 = (n^2 + 2)(n - 2)$, овај број је прост ако је $n - 2 = 1$ и $n^2 + 2$ прост број. За $n = 3$ је $n^2 + 2 = 11$, па је једино решење $n = 3$.

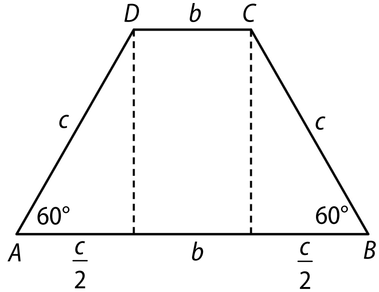
4. Нека су x и y ($x < y$) бројеви из скупа A. Тада је збир бројева из скупа B једнак $120 - x - y$. Једнакост $xy = 120 - x - y$ се може написати у облику $(x + 1)(y + 1) = 121$, одакле је $x + 1 = 1$ и $y + 1 = 121$ или $x + 1 = 11$ и $y + 1 = 11$. Како је у првом случају $y = 120 > 15$, а у другом случају $x = y = 10$, закључујемо да се бројеви не могу поделити на тражени начин.

5. Нека полуправе CM и CN секу AB у тачкама P и Q. Троуглови CPB и CQA су једнакокраки ($CB = PB$, $CQ = QA$), па је $PQ = BP + AQ - AB = BC + AC - AB = 112$ cm. Тачке M и N су средишта дужи CP, односно CQ, па је MN средња линија $\triangle PQC$ и $MN = 56$ cm.



VIII разред

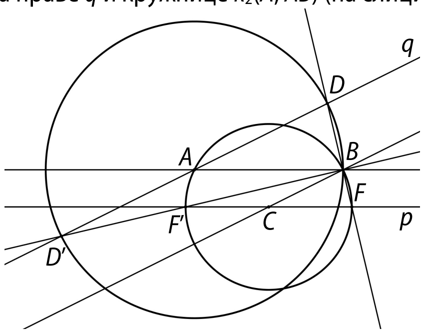
1. Трапез је једнакокрак са крацима $BC = AD = c$ и основицама $CD = b$ и $AB = a = b + c$. Из $3c + 2b = 200$ следи да је $b = \frac{200 - 3c}{2}$. Површина трапеза је $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2b+c}{2} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3} = (100 - c) \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{100 - c + c}{2}\right)^2 = 1250\sqrt{3}$. Површина је максимална када је $100 - c = c$, тј. $c = 50$ cm и $b = 25$ cm, одакле је дужина дуже основнице једнака 75 cm.



2. Нека је A произвољно теме призме. Преостала темена призме су од темена A удаљена за дужине $1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2, 2, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}$. Дакле, свако теме призме је теме при врху тачно четири једнакокрака троугла и теме једног једнакостраничног троугла странице $\sqrt{3}$ cm. Број троуглова који имају бар две странице једнаке дужине (једнакокраки и једнакостранични троуглови) је $12 \cdot 4 + 4 = 52$, па је број разностраних троуглова $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}-52=168$.

3. Претпоставимо да је $a \le b \le c$. Ако би било $a \ge 3$, важило би $ab + bc + ca \le 3bc \le abc$, што је немогуће. Дакле, $a = 2$. Дата неједнакост постаје $2bc < 2b + bc + 2c$, тј. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}$. Ако је сада $b \ge 5$, онда је $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$. Дакле, $b = 2$ или $b = 3$.
Ако је $b = 2$, онда је $4c < 4 + 2c + 2c$, па c може да буде произвољан прост број.
Ако је $b = 3$, онда је $6c < 6 + 5c$, па је $c = 3$ или $c = 5$.
Претходна решења су у случају када је $a \le b \le c$, а како редослед може бити произвољан тражене тројке су (p је произвољан прост број):
$(2, 2, p), (2, p, 2), (p, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2), (2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)$.

4. Нека је F тачка пресека правих p и BD. Троуглови ABD и CFB су слични (странице су им паралелне па су и унутрашњи углови једнаки). Како је AB = AD, то је и CF = CB = r, па тачка F припада кружници k_1. Аналогно се доказује и ако је D друга тачка пресека праве q и кружнице $k_2(A, AB)$ (на слици означена са D').



5. Важи да је $\overline{abbaabbaabba}=\overline{abba}\cdot 100010001$. Број 100010001 је дељив са 3, 7, 13 и 37, а није дељив са 3^2, 7^2, 13^2 и 37^2. Да би број $\overline{abbaabbaabba}$ био квадрат неког природног броја, онда $\overline{abba}$ мора бити дељиво са 3, 7, 13 и 37. Како је $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$, а број $\overline{abba}$ је четвороцифрен, следи да се не могу одредити цифре a и bтакве да је број $\overline{abbaabbaabba}$ квадрат природног броја.