ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

10.02.2024.

VII разред

1. Одреди цео број a и природан број n, тако да буде тачна једнакост:

$$a^n = \frac{0{,}125^4 \cdot (-4{,}5)^6 \cdot (-0{,}375)^6 \cdot 125}{2{,}25^9 \cdot 0{,}5^{18}}.$$

2. На колико начина се број 2024 може приказати као производ три различита природна броја? Редослед чинилаца није битан.

3. Странице троугла ABC су $AB = 21$ cm, $BC = 17$ cm, $AC = 10$ cm. У унутрашњој области троугла дата је тачка M чије је растојање од странице AB једнако 2 cm, а од странице BC једнако 4 cm. Одреди растојање тачке M од странице AC.

4. Одреди све природне бројеве мање од 1000 чији је производ са бројем 7 једнак кубу неког природног броја.

5. Нека је D тачка хипотенузе AB правоуглог троугла ABC, таквог да је $CA = CD = \sqrt{5}$ и $CB = 2\sqrt{5}.$ Израчунај обим и површину троугла BCD.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

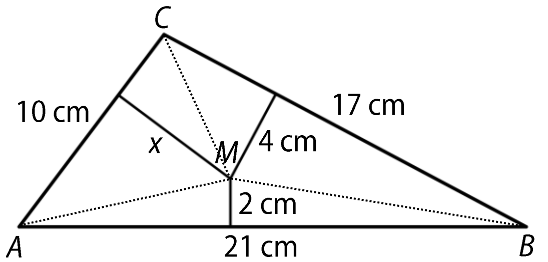
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је $0{,}125^4=\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{1}{2^{12}}$ [**2 бода**], $(-4{,}5)^6=4{,}5^6=\left(\frac{9}{2}\right)^6=\frac{3^{12}}{2^6}$ [**2 бода**], $(-0{,}375)^6=0{,}375^6=\left(\frac{3}{8}\right)^6=\frac{3^6}{2^{18}}$ [**2 бода**], $125=5^3$ [**1 бод**], $2{,}25^9=\left(\frac{9}{4}\right)^9=\frac{3^{18}}{2^{18}}$ [**2 бода**] и $0{,}5^{18}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}=\frac{1}{2^{18}}$ [**2 бода**], то је

$$\frac{\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{3^{12}}{2^6}\cdot\frac{3^6}{2^{18}}\cdot 5^3}{\frac{3^{18}}{2^{18}}\cdot\frac{1}{2^{18}}}=5^3$$ [**7 бодова**], па је $a = 5$ [**1 бод**] и $n = 3$ [**1 бод**].

2. $2024 = 1 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ [**6 бодова**]. Уочимо све производе у којима је 1 један од чинилаца. Тада је $2024 = 1 \cdot 2 \cdot 1012 = 1 \cdot 4 \cdot 506 = 1 \cdot 8 \cdot 253 = 1 \cdot 11 \cdot 184 = 1 \cdot 22 \cdot 92 = 1 \cdot 23 \cdot 88 = 1 \cdot 44 \cdot 46$ [сваки производ **по 1 бод**]. Ако је 2 најмањи од чинилаца, све могућности $2 \cdot 4 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 92 = 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2 \cdot 23 \cdot 44$ [сваки производ **по 1 бод**]. Ако је 4 најмањи од чинилаца, сви производи су $4 \cdot 11 \cdot 46 = 4 \cdot 22 \cdot 23$ [сваки производ **по 1 бод**]. Ако је 8 најмањи чинилац, постоји само један производ $8 \cdot 11 \cdot 23$ [**1 бод**]. За сваки нетачно наведени производ одузети по 1 бод.

3. Површину троугла *ABC* можемо израчунати користећи Херонов образац: $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је s полуобим троугла, тј. $s = 24$ cm, па је $P=\sqrt{24\cdot3\cdot7\cdot14}=84$ cm^2 [**8 бодова**]. Са друге стране површину троугла *ABC* можемо израчунати као збир површина троуглова *ABM*, *BMC* и *AMC*, у којима су висине заправо растојања тачке *M* од страница троугла. Следи да је $P=\frac{21\cdot2}{2}+\frac{17\cdot4}{2}+\frac{10\cdot x}{2}$ = 84 cm^2 [**8 бодова**], одакле је тражено растојање $x = 5{,}8$ cm [**4 бода**].



4. (МЛ 57/2) Нека је x такав број. Тада је $7x = y^3$, за неки природан број y. Због дељивости леве стране са 7, следи да таква мора бити и десна страна, па је $y = 7k$, за неки природан број k [**5 бодова**]. Одатле следи да је $7x = 7^3 \cdot k^3$, односно $x = 49 \cdot k^3$ [**5 бодова**]. Ако је $k \geq 3$, онда је $x = 49 \cdot k^3 \geq 49 \cdot 3^3 = 1323 > 1000$, што се противи услову задатка да је $x < 1000$. Дакле, важи $k < 3$ [**6 бодова**]. За $k = 1$ је $x = 49$ [**2 бода**], а за $k = 2$ је $x = 392$ [**2 бода**].

5. (МЛ 58/1) Нека је E подножје висине из темена C на хипотенузу AB. На основу Питагорине теореме је $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ [**1 бод**]. Из површине троугла ABC је $P = \frac{AC \cdot BC}{2} = 5 = \frac{AB \cdot EC}{2} = \frac{5 \cdot EC}{2}$, одакле следи да је $EC = 2$ [**4 бода**]. Даље, из Питагорине теореме у једнакокраком троуглу ADC је $ED = AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = 1$ [**4 бода**], па је $BD = AB - AD = 3$ [**5 бодова**]. Обим троугла BCD је онда једнак $3 + 3\sqrt{5}$ [**3 бода**]. Површину троугла BCD можемо добити када од површине троугла ABC одузмемо површину троугла ACD и она је $P = 5 - \frac{AD \cdot EC}{2} = 3$ [**3 бода**].