ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
04.02.2023.

VII разред

1. Одреди сложен природан број *s* и прост број *p*, такве да је

$$\frac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = s^p.$$

Одреди сва решења.

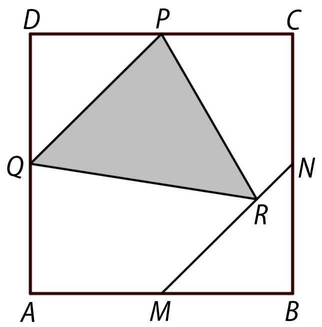
2. Ромб *ABCD* има страницу 6 cm и угао од 60° код темена *A*. Из темена *B* конструисане су висине ромба *BE* и *BF*. Израчунај обим и површину троугла *BEF*.

3. Одреди прост број *p* и различите целе бројеве *a* и *b* такве да је

$$p + |a \cdot b| = 10.$$

Колико решења постоји (сматрамо да је решење исто ако бројеви *a* и *b* замене вредности)?

4. Израчунај површину троугла *PQR* на слици ако је страница квадрата *ABCD* једнака 12 cm. Тачке *M*, *N*, *P* и *Q* су средишта страница квадрата, а тачка R произвољна тачка дужи *MN*.



5. Ната је редом записивала бројеве 1, -3, 5, -7, 9, -11, ... (наизменично мења знак бројева који по апсолутној вредности формирају низ непарних природних бројева). Колико бројева Ната може записати тако да збир свих записаних бројева буде делилац броја 2023?

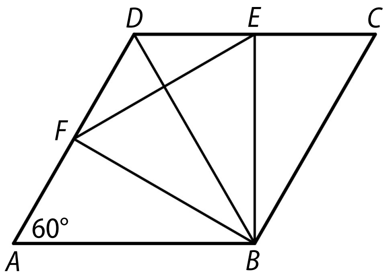
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55-5**) $\dfrac{32^5\cdot16^4\cdot8^3}{64^2}=\dfrac{2^{25}\cdot2^{16}\cdot2^9}{2^{12}}=2^{38}$ [**8 бодова**]. Како је 38 = 2 · 19, имамо и два решења: $s = 2^2$, $p = 19$ [**6 бодова**] и $s = 2^{19}$, $p = 2$ [**6 бодова**].

2. (**МЛ 57-1**) Троуглови *ABD* и *CBD* су једнакостранични троуглови. Висине ромба *BE* и *BF* су висине ових једнакостраничних троуглова, па је $BE = BF = 3\sqrt{3}$ cm [**4 бода**]. Како су *BE* и *BF* висине једнакостраничних троуглова, то је $\measuredangle FBD = \measuredangle EBD = 30°$, то је $\measuredangle FBE = 60°$ [**4 бода**]. Троугао *FBE* је једнакокраки са углом при врху од 60°, па је троугао *FBE* једнакостраничан [**2 бода**]. Због тога је $O = 3\cdot BE = 9\sqrt{3}$ cm [**5 бодова**], а површина $P=\dfrac{BE^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2 [**5 бодова**].



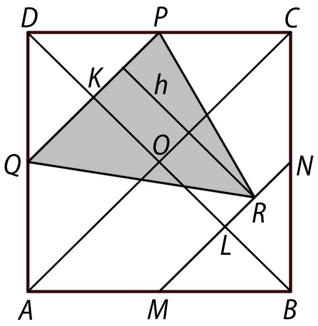
3. Прост број *p* може имати вредност 2, 3, 5 и 7. У зависности од вредности за *p* имамо следећа решења:

p	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7	7
a	1	–1	1	–1	2	–2	2	–2	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
b	8	8	–8	–8	4	4	–4	–4	7	7	–7	–7	5	5	–5	–5	3	3	–3	–3

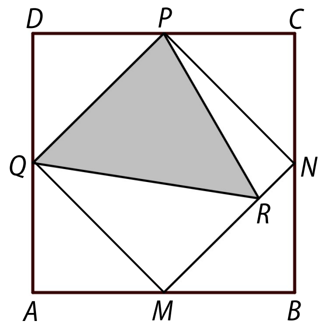
[Свако тачно решење по **1 бод**. За свако нетачно решење одузети **1 бод**. Укупан број бодова не може бити негативан.]

Напомена. Признавати и бодовати одговарајућим бројем бодова и ако ученик опише одговарајућу групу решења без навођења сваког конкретног пара бројева.

4. *I начин*: Нека је *O* тачка пресека дијагонала квадрата, а *K* и *L* тачке пресека дијагонале *BD* и дужи *PQ* и *MN*, редом. *PQ* и *MN* су средње линије троуглова *ACD* и *ACB*, па је $PQ \parallel AC$ и $PQ=\dfrac{1}{2}AC=6\sqrt{2}$ cm [**4 бода**]. Како средње линије деле висине тих троуглова на два једнака дела, то је $DK = KO$ и $BL = LO$, па је $KL=\dfrac{1}{2}BD=6\sqrt{2}$ cm [**8 бодова**]. Како је $KL \perp PQ$, то је висина троугла *PQR* једнака *KL*, па је $h = 6\sqrt{2}$ cm [**4 бодова**]. Тражена површина је $\dfrac{PQ\cdot h}{2}=36$ cm^2 [**4 бода**].



II начин: Четвороугао *PQMN* је квадрат [**4 бода**] јер су једнакокрако-правоугли троуглови *AMQ*, *BNM*, *CPN* и *DQP* подударни (СУС) па је је $MN = NP = PQ = QM$ [**4 бода**], а како су сви оштри углови ових троуглова по 45°, то су и сви унутрашњи углови четвороугла *MNPQ* прави [**4 бода**]. Питагорином теоремом добијамо да је страница квадрата *MNPQ* једнака $6\sqrt{2}$ cm [**4 бода**]. Висина троугла *PQR* која одговара страници *PQ* је једнака страници квадрата *MNPQ*, па је тражена површина 36 cm^2 [**4 бода**].



5. Број 2023 се може раставити на производ простих чинилаца 2023 = 7 · 17 · 17, па су делиоци броја 2023: 1, 7, 17, 119, 289, 2023 [**6 бодова**]. У датом низу видимо да је збир другог и трећег члана 2, четвртог и петог члана 2, ... тј. збир сваког парног члана низа и његовог следбеника једнак је 2, па је збир непарног броја чланова низа (сабирамо од првог члана низа) једнак броју чланова низа [**8 бодова**]. Можемо закључити да Ната може записати бројеве на 6 начина, тако да их буде 1, 7, 17, 119, 289 или 2023 у низу [**6 бодова**].