ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
04.02.2023.

VI разред

1. Дати су разломци $\frac{43}{337}$ и $\frac{6}{47}$. Који број треба одузети и од бројиоца и од имениоца мањег разломка да би добијени разломак био једнак већем од њих?

2. Три врсте жетона: бели, црни и црвени, су поређани у један низ. Прво су бели жетони поређани у један низ, затим је између свака два бела жетона стављен по један црни жетон. На крају је између свака два жетона у низу стављен по један црвени жетон. Колико је било белих жетона ако је укупно постављено у низ 397 жетона?

3. За оштроугли троугао ABC важи да је разлика унутрашњих углова код темена A и C једнака $50°$ и да се нормале из темена A и C секу у тачки H тако да је $\measuredangle AHC = 110°$. Израчунај мере унутрашњих углова тог троугла.

4. Дат је број 123456789. Колико најмање цифара треба прецртати да би преостали број био дељив са 36?

5. У правоуглом троуглу ABC ($\measuredangle ACB = 90°$) симетрале оштрих углова секу наспрамне катете у тачкама A_1 и B_1. Тачка M је подножје нормале из тачке A_1 на хипотенузу, а тачка N подножје нормале из тачке B_1 на хипотенузу. Одреди меру угла MCN.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

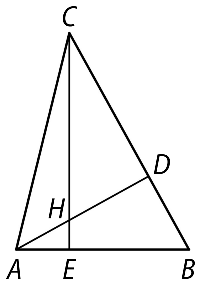
1. (**МЛ 56-4**) Бројилац разлике $\frac{43}{337}-\frac{6}{47}$ једнак је $43 \cdot 47 - 6 \cdot 337 = -1$, па је $\frac{43}{337}-\frac{6}{47}<0$, тј. $\frac{43}{337}<\frac{6}{47}$ [**7 бодова**]. Ако и од имениоца и од бројиоца разломка одузмемо исти број, добијамо $\frac{43-x}{337-x}=\frac{6}{47}$ [**3 бода**]. Решавањем ове једначине добијамо да је и од бројиоца и од имениоца потребно одузети број $x=-\frac{1}{41}$ [**10 бодова**].

2. Црвених жетона је стављено за 1 мање од укупно белих и црних жетона. Црвених жетона има (397 – 1) : 2 = 198 [**8 бодова**]. Дакле белих и црних је укупно 397 – 198 = 199 [**4 бода**]. Црних жетона има за 1 мање од белих. Црних жетона има (199 – 1) : 2 = 99 [**4 бода**], а белих жетона има 199 – 99 = 100 [**4 бода**].

3. (**МЛ 55-1**) Означимо унутрашње углове код темена A, B и C са α, β и γ. Тада је $\alpha - \gamma = 50°$. Како су AD и CE висине троугла, то су троуглови ADC и AEC правоугли и важи $\measuredangle ACE = 90° - \alpha$ [**2 бода**] и $\measuredangle DAC = 90° - \gamma$ [**2 бода**]. Сада је

$$\measuredangle AHC = 180° - \measuredangle ACE - \measuredangle DAC = \alpha + \gamma = 110° \text{ [7 бодова]}.$$

Из $\alpha - \gamma = 50°$ и $\alpha + \gamma = 110°$ добијамо да је $\alpha = 80°$, $\gamma = 30°$ и $\beta = 70°$ [сваки тачно израчунати угао по **3 бода**].



4. Да би број био дељив са 36, мора да буде дељив и са 4 и са 9 [**2 бода**]. Да би број био дељив са 4, двоцифрени завршетак мора да му буде дељив са 4, па цифру 9 морамо прецртати [**4 бода**]. Након тога остаје број 12345678 који је дељив са 9 (збир цифара му је 36), али није са 4. Ако прецртамо било коју од преосталих цифара, број неће бити дељив са 9, па је потребно прецртати не једну већ бар још две цифре [**4 бода**]. Да би двоцифрени завршетак био дељив са 4 прецртаћемо цифру 7, чиме добијамо двоцифрени завршетак 68, који је дељив са 4 [**4 бода**]. Да би добијени број 1234568 био дељив и са 9 потребно је прецртати и цифру 2 (збир цифара броја је 27) [**4 бода**]. Дакле, потребно је прецртати најмање 3 цифре да би преостали број (134568) био дељив са 36 [**2 бода**].

5. Нека је $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Троуглови MBA_1 и NB_1A су правоугли, а како је $\alpha + \beta = 90°$, то је $\measuredangle BA_1M = \alpha$ [**2 бода**] и $\measuredangle AB_1N = \beta$ [**2 бода**]. Троуглови ACA_1 и AMA_1 су подударни (УСУ), па је $A_1C = A_1M$ [**3 бода**]. Слично, из подударности троуглова BB_1C и BB_1N (УСУ) следи $B_1C = B_1N$ [**3 бода**]. Троуглови MCA_1 и NCB_1 су једнакокраки, а како су $\measuredangle BA_1M$ и $\measuredangle AB_1N$, редом, спољашњи углови ових троуглова, добијамо да је $\measuredangle A_1CM = \frac{\alpha}{2}$ [**3 бода**] и $\measuredangle B_1CN = \frac{\beta}{2}$ [**3 бода**]. Сада имамо да је

$$\measuredangle MCN = 90° - (\measuredangle A_1CM + \measuredangle B_1CN) = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 45° \text{ [4 бода]}.$$