Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VII разред

1. Збир четири полинома P_1, P_2, P_3 и P_4 је $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 13$. Полином P_1 је степена 4, P_2 је степена 3, P_3 је степена 2 и P_4 је степена 1. Сви коефицијенти у полиному P_1 су једнаки, сви коефицијенти у полиному P_2 су једнаки и сви коефицијенти у полиному P_3 су једнаки. Одреди полином P_4.

2. Тежишне дужи које одговарају катетама правоуглог троугла имају дужине $\sqrt{52}$ cm и $\sqrt{73}$ cm. Одреди растојање између тежишта и центра описане кружнице тог троугла.

3. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ секу се у тачки O. Тачка E је тежиште троугла ABD. На дужи OC дата је тачка G таква да је $OG : GC = 1 : 2$. Докажи да је четвороугао $EBGD$ паралелограм.

4. Одреди све просте бројеве p и q тако да важи $20p + 23q = 2023$.

5. На једној прослави 20% гостију су обукли плаве панталоне, при чему је 60% гостију са плавим панталонама носило беле ципеле. Међу гостима који нису обукли плаве панталоне 30% је носило беле ципеле. Израчунај колико процената гостију који носе беле ципеле је обукло плаве панталоне.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. *I начин*. Према услову задатка важи

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 13,$$

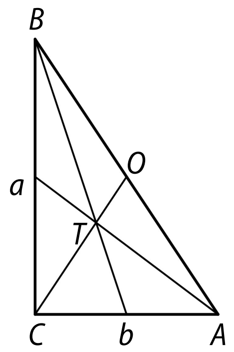
при чему је P_1 једини сабирак степена 4. То значи да су сви коефицијенти полинома P_1 једнаки 1, јер је 1 коефицијент у моному највишег степен збира полинома. Дакле, $P_1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ [**4 бода**]. Одузимањем P_1 од збира добијамо да је $P_2 + P_3 + P_4 = -3x^3 + 3x^2 - 9x + 12$ [**4 бода**]. Аналогно добијамо да је $P_2 = -3x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ [**3 бода**] и $P_3 + P_4 = 6x^2 - 6x + 15$ [**3 бода**], одакле је $P_3 = 6x^2 + 6x + 6$ [**3 бода**] и $P_4 = -12x + 9$ [**3 бода**].

II начин. Нека су коефицијенти полинома P_1 једнаки a, полинома P_2 једнаки b, полинома P_3 једнаки c и нека је $P_4 = dx + e$. Тада је
$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 =$
$= ax^4 + x^3(a + b) + x^2(a + b + c) + x(a + b + c + d) + (a + b + c + e)$ [**4 бода**], одакле закључујемо да је $a + b + c = 4$ [**2 бода**], $a + b + c + d = -8$ [**2 бода**], $a + b + c + e = 13$ [**2 бода**]. Сада је:

$d = (a + b + c + d) - (a + b + c) = -8 - 4 = -12$ [**5 бодова**] и

$e = (a + b + c + e) - (a + b + c) = 13 - 4 = 9$ [**5 бодова**],

одакле је $P_4 = -12x + 9$.

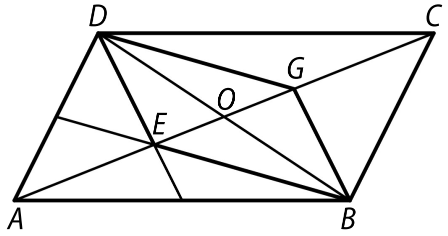


2. (**МЛ 56-3**) Нека је C теме правог угла, T тежиште и O центар описане кружнице тог троугла. O је уједно и средиште хипотенузе, означимо је са c, па су тачке C, T и O колинеарне [**3 бода**]. Како тежиште дели тежишну дуж у размери 2 : 1 и $CO = \frac{c}{2}$, то је $TO = \frac{1}{3}CO = \frac{c}{6}$ [**3 бода**]. Ако катете правоуглог троугла означимо са a и b ($a > b$), важи да је $73 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ [**3 бода**] и $52 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ [**3 бода**]. Сабирањем ове две једнакости добијамо $125 = \frac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, тј. $100 = c^2$, па је $c = 10$ cm [**6 бодова**]. Коначно, тражено растојање је $TO = \frac{5}{3}$ cm [**2 бода**].

3. Пошто је тачка O средиште дијагонале BD, која је и страница троугла ABD, важи да је AO тежишна дуж троугла ABD [**2 бода**]. Тачка E је тежиште троугла ABD, па је $AE : EO = 2 : 1$, тј. $EO = \frac{1}{3}AO$ [**3 бода**].

Из $OG : GC = 1 : 2$ следи да је $OG = \frac{1}{3}OC$ [**2 бода**]. Знамо да је $AO = OC$.

Одатле је $OG = \frac{1}{3}OC = \frac{1}{3}AO$, па је $OG = EO$ [**3 бода**]. Доказ можемо завршити на више начина.



I начин. Доказали смо да је пресечна тачка O дијагонала EG и BD четвороугла $EBGD$ уједно и средиште сваке од њих, па се дијагонале четвороугла $EBGD$ полове међусобно [**6 бодова**]. Дакле, овај четвороугао је паралелограм [**4 бода**].

II начин. Такође важи $BO = OD$, као и $\measuredangle EOD = \measuredangle GOB$ (унакрсни углови). Одатле, на основу става СУС, троуглови EOD и GOB су подударни, па је $BG = ED$ [**3 бода**]. На исти начин доказујемо да су троуглови EBO и GDO подударни, па је $EB = GD$ [**3 бода**]. Дакле, наспрамне странице четвороугла $EBGD$ су једнаке, па је овај четвороугао паралелограм [**4 бода**].

III начин. Из доказане подударности троуглова EBO и GDO, закључујемо да је $\measuredangle EBO = \measuredangle GDO$ (или $\measuredangle BEO = \measuredangle DGO$), па су дужи BE и GD паралелне [**3 бода**]. На исти начин, из подударности троуглова EOD и GOB добијамо да су дужи BG и ED паралелне [**3 бода**]. Дакле, наспрамне странице четвороугла $EBGD$ су паралелне, па је овај четвороугао паралелограм [**4 бода**].

4. *I начин*. Последња цифра броја $20p$ је нула [**1 бод**]. Због тога се $23q$ завршава цифром 3, па се прост број q завршава цифром 1 [**3 бода**]. Како је $23q < 2023$, то је $q \leq 87$ [**4 бода**]. Дакле, q мора бити неки од бројева 11, 31, 41, 61 или 71 [**4 бода**]. Провером наведених бројева, долазимо да је једино могуће решење $q = 61$ и $p = 31$ [**8 бодова**]. [За свако погрешно наведено решење одузети по 3 бода.]

Напомена. Неки од наведених 5 случајева могу се елиминисати следећим разматрањем: из

$$20p + 23q = 20p + 20q + 3q = 2023 = 2020 + 3,$$
$$3q - 3 = 2020 - 20p - 20q,$$

следи $20 \mid 3(q - 1)$, тј. $20 \mid q - 1$, одакле је $q = 41$ или $q = 61$.

II начин. Полазна једначина је еквивалентна са $23q - 23 = 2000 - 20p$, односно $23(q - 1) = 20(100 - p)$ [**4 бода**]. Како је $23(q - 1) > 0$, јер је q прост број, и НЗД$(20,23) = 1$, то је $100 - p$ природан број дељив са 23 [**4 бодова**]. Тада $100 - p$ може имати вредности 23, 46, 69 и 92, одакле је $p = 77$, $p = 54$, $p = 31$ или $p = 8$ [**4 бода**]. Једино решење за које је p прост број је $p = 31$. У том случају је $q = 61$ [**8 бодова**].

5. Нека је x број гостију на прослави. Према услову задатка $\frac{1}{5}x$ гостију је обукла плаве панталоне [**2 бода**], па $\frac{4}{5}x$ није обукло плаве панталоне [**2 бода**]. У групи гостију са плавим панталонама, њих $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x = \frac{3}{25}x$ је носило беле ципеле [**4 бода**], док међу гостима који нису имали плаве панталоне било је $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}x = \frac{6}{25}x$ оних који носе беле ципеле [**4 бода**]. Укупан број гостију који носе беле ципеле је $\frac{9}{25}x$ [**3 бода**], а међу њима удео оних гостију који су обукли плаве панталоне је $\left(\frac{3}{25}x\right):\left(\frac{9}{25}x\right) = \frac{1}{3}$, што је $33\frac{1}{3}\% = 33,\overline{3}\%$ [**5 бодова**].