Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

18.03.2023.

VI разред

1. Израчунај вредност израза

$$-(b-a)-(a+(-b))+4ab$$

ако је $a=-2{,}5$ и $b=5{,}5$.

2. Вредност израза $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ је 2023. Колико чинилаца има у овом изразу?

3. У фудбалу победник меча добија 3 бода, а поражени добија 0 бодова. Ако се меч заврши нерешено, тада оба тима добијају по 1 бод. Једна екипа је одиграла 68 утакмица и освојила 170 бодова. Колико највише утакмица је та екипа могла да изгуби?

4. Докажи да међу 26 различитих непарних природних бројева мањих од 100 постоје бар два чији је збир једнак 100.

5. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је E тачка на полуправој AB таква да је $\measuredangle AED = 22°\,30'$. Ако се дужи AC и DE секу у тачки S, одреди меру угла BSE.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 57-2**) *I начин*. Сређивањем датог израза добијамо
$-(b-a)-(a+(-b))+4ab=-b+a-a+b+4ab=4ab$ [**15 бодова**], одакле заменом вредности за a и b следи да је вредност датог израза једнака $4ab=4\cdot(-2{,}5)\cdot 5{,}5=-55$ [**5 бодова**].

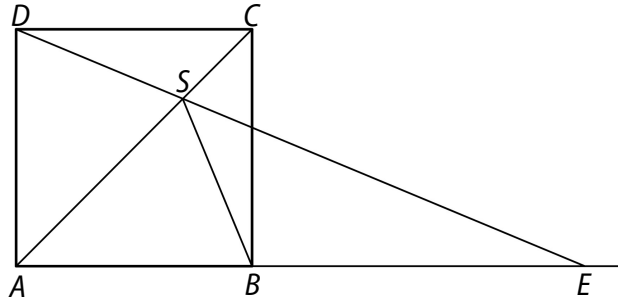
II начин. Заменом вредности за a и b у датом изразу, добијамо
$-(5{,}5-(-2{,}5))-(-2{,}5+(-5{,}5))+4\cdot(-2{,}5)\cdot 5{,}5=-8+8-55=-55$.
[По **5 бодова** за тачно израчунате вредности $-(b-a)$; $(a+(-b))$ и $4ab$ и **5 бодова** за тачно израчунату вредност израза].

2. Како је

$$2023=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2},$$

то је $\frac{n+1}{2}=2023$ [**10 бодова**], па закључујемо да је $n+1=4046$, па је $n=4045$ [**5 бодова**], одакле следи да у датом изразу има 4044 чинилаца [**5 бодова**].

3. Означимо са x, y и z број утакмица које је ова екипа победила, играла нерешено и изгубила, редом. Тада важи да је $3x+y=170$ и $x+y+z=68$. Број изгубљених утакмица је највећи када збир $x+y$ има најмању вредност [**3 бода**]. Збир $x+y$ је најмањи ако је x највећи могући број, јер ако за 1 смањимо x потребно је y повећати за 3 [**2 бода**]. Како је $170=3\cdot 56+2$, то је $x=56$ [**5 бодова**] и $y=2$ [**5 бодова**], одакле следи да је највећи број утакмица које је дата екипа могла да изгуби једнак $68-(56+2)=10$ [**5 бодова**].

4. Непарних бројева мањих од 100 има укупно 50 и то су 1, 3, 5, ..., 97, 99. Уочимо двочлане скупове формиране од ових бројева, такве да је збир елемената сваког скупа једнак 100. То су скупови: {1, 99}, {3, 97}, ..., {47, 53}, {49, 51}. Ових скупова има 25 [**10 бодова**]. Ако желимо да изаберемо бројеве тако да међу њима нема два чији је збир 100, онда из сваког од ових скупова можемо одабрати највише 1 елемент, тј. можемо одабрати највише 25 таквих бројева. Било који број од преосталих ако изаберемо као 26. он ће са неким од већ изабраних бројева да даје збир 100 [**10 бодова**], што је и требало доказати.

5. Приметимо да је $\measuredangle EDA=90^\circ-22^\circ\,30'=67^\circ\,30'$ [**2 бода**]. Даље је $\measuredangle DAS=\measuredangle DAC=45^\circ$ [**2 бода**], јер је AC дијагонала квадрата $ABCD$. Због тога је у троуглу ADS угао $\measuredangle DSA=67^\circ\,30'$ [**2 бода**]. Закључујемо да је троугао ADS једнакокрак и $AD=AS$ [**2 бода**], а како је $AD=AB$, то је $AS=AB$, па је и троугао ABS једнакокрак [**4 бода**]. Како је $\measuredangle BAS=45^\circ$, у троуглу ABS је $\measuredangle ASB=\measuredangle ABS=67^\circ\,30'$ [**4 бода**]. Дакле, тражени угао је $\measuredangle BSE=180^\circ-2\cdot 67^\circ\,30'=45^\circ$ [**4 бода**].