

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа  
23.04.2016.

VII разред

1. Нека су  $a$ ,  $b$  и  $c$  цифре такве да је један од двоцифрених бројева  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  и  $\overline{ca}$  аритметичка средина друга два. Докажи да је  $a = b = c$ .
2. На једном шаховском турниру сваки играч је играо са сваким другим играчем по две партије. Познато је да су непосредно пред почетак турнира два или три играча отказала учешће, па је одиграно тачно 84 партије мање него што је планирано. Колико играча је остало на турниру?
3. Одреди све тројке позитивних реалних бројева  $a$ ,  $b$  и  $c$  такве да је  $abc = 1$  и  $ab + ac + bc + a + b + c = 6$ .
4. Нека су  $A'$  и  $B'$  подножја нормала из крајњих тачака  $A$  и  $B$  пречника  $AB$  датог круга  $k$  на произвољну тангенту тог круга. Докажи да је збир дужи  $AA' + BB'$  константан, тј. да не зависи од избора тангенте.
5. Дат је квадрат  $ABCD$  странице  $a$ . На страници  $AB$  дата је тачка  $E$  таква да је  $AE : EB = 2 : 1$ . Нека је тачка  $F$  произвољна тачка дијагонале  $BD$ . Докажи да је

$$AF + EF \geq \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.  
Израда задатака траје 180 минута.  
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа  
23.04.2016.

VII разред

1. Нека су  $a$ ,  $b$  и  $c$  цифре такве да је један од двоцифрених бројева  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  и  $\overline{ca}$  аритметичка средина друга два. Докажи да је  $a = b = c$ .
2. На једном шаховском турниру сваки играч је играо са сваким другим играчем по две партије. Познато је да су непосредно пред почетак турнира два или три играча отказала учешће, па је одиграно тачно 84 партије мање него што је планирано. Колико играча је остало на турниру?
3. Одреди све тројке позитивних реалних бројева  $a$ ,  $b$  и  $c$  такве да је  $abc = 1$  и  $ab + ac + bc + a + b + c = 6$ .
4. Нека су  $A'$  и  $B'$  подножја нормала из крајњих тачака  $A$  и  $B$  пречника  $AB$  датог круга  $k$  на произвољну тангенту тог круга. Докажи да је збир дужи  $AA' + BB'$  константан, тј. да не зависи од избора тангенте.
5. Дат је квадрат  $ABCD$  странице  $a$ . На страници  $AB$  дата је тачка  $E$  таква да је  $AE : EB = 2 : 1$ . Нека је тачка  $F$  произвољна тачка дијагонале  $BD$ . Докажи да је

$$AF + EF \geq \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.  
Израда задатака траје 180 минута.  
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.