МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ
РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Београд, 30 – 31. мај 2009.

1. дан

1. Дати су природни бројеви a, b и n такви да је $a^2 + 2nb^2$ потпун квадрат. Докажи да се број $a^2 + nb^2$ може приказати као збир квадрата два природна броја.

2. У једнакокрако-правоуглом троуглу ABC уписана је кружница. Нека је CD висина на хипотенузу ($D \in AB$), и нека је P пресек (други) уписане кружнице и висине CD. У ком односу кружница дели дуж AP?

3. На сваком пољу табле димензије $n \times n$ ($n \geq 2$) налази се по један жетон. У једном кораку померамо сваки жетон на једно њему суседно дијагонално поље. После неког корака на једном пољу може се налазити више жетона. Одреди најмањи број поља на која се могу поставити сви жетони после неког броја померања.

4. У запису 2009-цифреног природног броја појављују се само цифре 5 и 8. Докажи да се изостављањем само једне цифре може добити 2008-цифрен број дељив са 11.

2. дан

5. Одреди све двоцифрене бројеве $\overline{AB}$, такве да $\overline{AB}$ дели $\overline{A0B}$.

6. Из скупа {1, 2, 3, …, 2009} изабрано је 1005 бројева, тако да збир никоја два није 2009 ни 2010. Одреди све начине на које је могуће изабрати тих 1005 бројева.

7. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да је

$$\angle CBD = 2 \cdot \angle ADB, \quad \angle ABD = 2 \cdot \angle CDB \quad \text{и} \quad AB = CB.$$

Докажи да је четвороугао $ABCD$ делтоид.

8. За позитивне реалне бројеве x, y, z важи

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Докажи неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{1}{3}.$$

Решења задатака првог дана

1. Нека је $a^2 + 2nb^2 = c^2 \ (c \in N)$. Тада је $c^2 - a^2 = 2nb^2$ и закључујемо да је $c > a$ и да су c и a исте парности. Како је $nb^2 = \frac{c^2 - a^2}{2}$, то је $a^2 + nb^2 = a^2 + \frac{c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + 2ac + c^2 + c^2 - 2ac + a^2}{4} = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$. Како су a и c исте парности, то су бројеви $a + c$ и $c - a$ парни, па су $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ природни бројеви и следи тврђење задатка.

2. Потребно је наћи однос $PQ : QA$. Како је $\angle QPD = \angle DPA$, правоугли троуглови ΔQPD и ΔDPA су слични и добијамо однос $PQ : QD = PD : AD$. Аналогно, из сличности троуглова ΔQDA и ΔDPA следи однос $DQ : QA = PD : AD$. Множењем датих односа добијамо

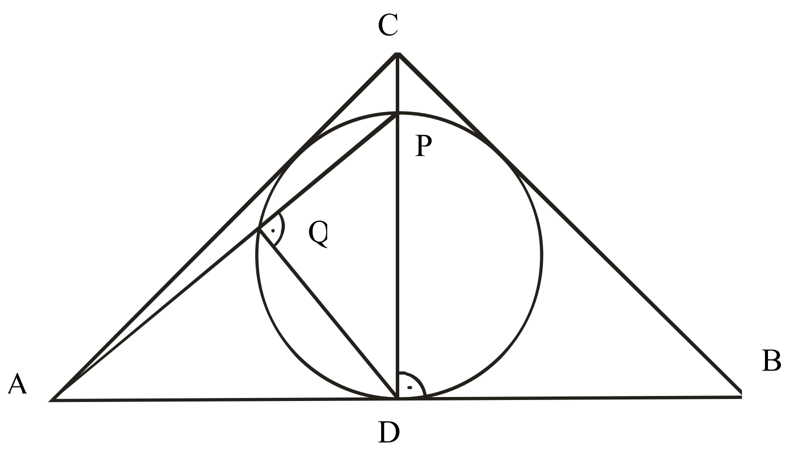
$$\frac{PQ}{QA} = \frac{PQ}{QD} \cdot \frac{DQ}{QA} = \left(\frac{PD}{AD}\right)^2 .$$

Означимо страницу једнакокрако-правоуглог троугла ABC са a. Тада је $AD = a\sqrt{2}/2$ и $PD = 2r$, где је r полупречник уписане кружнице. Из формуле $2S_{ABC} = r(a + b + c)$ добијамо

$$r = \frac{a^2}{a + a + a\sqrt{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$$

Коначно, тражени однос је једнак

$$\frac{PQ}{QA} = \left(\frac{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = 4 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$



3. Обојимо таблу шаховски црно-бело. Онда ниједан жетон не мења боју при померању на дијагонално поље. Докажимо да на свакој од боја остају бар 2 жетона. Нумеришимо вертикале бројевима од 1 до n. У сваком кораку жетон који се налази на црном пољу на вертикали пређе на црно поље вертикале са парним редним бројем. Такође важи и обрнуто. Како се на почетку жетони налазе на црним пољима и парних и непарних вертикала, то ће у сваком кораку бити бар 2 заузета црна поља. Слично се добија да ће у сваком кораку бити заузета бар два бела поља, па су у сваком тренутку заузета бар 4 поља табле. Докажимо да је ову вредност могуће постићи. Померајмо жетоне у сваком кораку ка угаоној подтабли 2×2 (произвољно изабраној). Ако се неки жетон већ налази у њој, ми га можемо оставити у њој одговарајућим дијагоналним померањем. Самим тим после коначно много корака само 4 поља табле ће бити заузета.

4. Број је дељив са 11 ако и само ако је разлика суме цифара на парним и непарним позицијама дељива са 11. Доказаћемо општије тврђење: ако се у запису $(2n+1)$-цифреног броја појављују само ненула цифре a и b, тада је могуће изостављањем само једне цифре добити $(2n)$-цифрен број, код кога је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. Уколико је полазни број облика $\overline{abab\ldots aba\ldots baba}$ или $\overline{baba\ldots bab\ldots abab}$, тада брисањем средње цифре добијамо симетричан број, за који важи да је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. У другом случају, полазни $(2n+1)$-цифрен број садржи бар један пар суседних цифара које су једнаке. Сада бришемо све парове суседних цифара које су једнаке aa или bb, док не добијемо број са непарним бројем цифара код кога су сваке две узастопне цифре различите. Овај случај смо већ решили, па можемо одредити цифру чијим избацивањем добијамо број који има једнаку суму цифара на парним и непарним позицијама. Када вратимо пар узастопних једнаких цифара aa, збир цифара на парним и непарним позицијама се увећава за a, односно збирови цифара на парним и непарним позицијама остају једнаки. Када вратимо све парове једнаких цифара, суме цифара на парним и непарним позицијама у $(2n)$-цифреном броју су једнаке, чиме смо комплетно решили задатак.

Задатак је могуће решити применом математичке индукције. За $n=3$, лако проверавамо све случајеве. Када су сваке две узастопне цифре различите, тражену цифру налазимо као у претходном решењу. У другом случају, постоје две суседне једнаке цифре у $(2n+1)$-цифреном броју. Када их избацимо, применом математичке индукције налазимо цифру коју можемо избацити из $(2n-1)$-цифреног броја, тако имамо једнак збир цифара на парним и непарним позицијама. Враћањем две једнаке цифре, завршавамо задатак као у претходном решењу.

Решења задатака другог дана

5. Услов $\overline{AB} \mid \overline{A0B}$ је еквивалентан услову $10A+B \mid (10(10A+B)-(100A+B))$, односно

$$10A+B \mid 9B.$$

За $B=0$, цифра A може бити произвољна и различита од нуле ($10A$ се садржи у нули). Непосредно се проверава да за $B \in \{1,2,3,4,6,7,9\}$ не постоји A које задовољава услов задатка. На пример, за $B=4$, $10A+4$ се не садржи у 36 ни за једну цифру A. За $B=5$, $10A+5$ се садржи у 45 за $A=1$ или $A=4$. За $B=8$, $10A+8$ се садржи у 72 за $A=1$. Дакле, тражени двоцифрени бројеви су:

10, 15, 18, 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80 и 90.

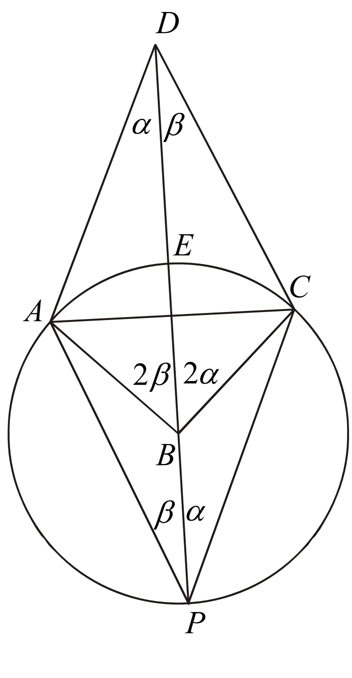
6. Нека је S тражени подскуп са 1005 бројева. Приметимо да за сваки број n осим 2009 и 1005, постоје тачно два броја који у збиру са n дају 2009 или 2010. Поставимо бројеве од 1 до 2009 на следећи начин

$$2009, 1, 2008, 2, 2007, 3, \ldots, 1007, 1003, 1006, 1004, 1005.$$

Збир свака два узастопна броја у низу је једнак 2009 или 2010. Према томе, никоја два узастопна броја не могу да буду у S. Како је $|S|=1005$, следи да 2009 мора припадати скупу S. Аналогно показујемо да бројеви $2008, 2007, \ldots, 1006, 1005$ морају припадати S, па је подскуп S јединствено одређен,

$$S=\{2009, 2008, 2007, \ldots, 1006, 1005\}.$$

7. Нека је $\angle ADB=\alpha,\ \angle CDB=\beta$. Тада је $\angle CBD=2\alpha,\ \angle ABD=2\beta$. Опишимо кружницу $k(B, BA)$, која ће садржати темена *A* и *C* и продужимо дијагоналу *BD* преко темена *B*. Права која садржи дијагоналу *BD* сече кружницу у тачкама *E* и *P* (види слику). $\angle APE$ је периферијски угао над тетивом *AE*, па је $\angle APE=\beta$. Аналогно је $\angle CPE=\alpha$. Закључујемо да је четвороугао *APCD* паралелограм. Како се код паралелограма дијагонале полове, то *BD* полови дијагоналу *AC*. Сада имамо да је троугао *ABC* једнакокрак и да дијагонала *BD* полови страницу *AC*, па је *BD* симетрала угла *ABC*. Због тога је $2\alpha=2\beta$, односно $\alpha=\beta$ и $\angle AEB=\angle CEB=90^\circ$. Како у четвороуглу *ABCD* важи *AB* = *BC*, једна дијагонала полови другу и дијагонале се секу под правим углом, то је овај четвороугао делтоид.



8. Из услова задатка следи да су бројеви x, y, z већи од 1. Доказаћемо неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} .$$

Сређивањем добијамо еквивалентне неједнакости:

$$2\left(x^3+2\right)-3\left(x^2+1\right)>0 ,$$
$$2\left(x^3-1\right)-3\left(x^2-1\right)>0 ,$$
$$2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-3(x-1)(x+1)>0 ,$$
$$(x-1)(2x^2-x-1)>0 .$$

Како је $x-1>0$ и $2x^2=x^2+x^2>x+1$, неједнакост је показана. Слично добијамо

$$\frac{1}{y^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2+1} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2+1} .$$

Сабирањем доказаних неједнакости и коришћењем датог услова добијамо тражену неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)=\frac{1}{3}.$$