MINISTARSTVO PROSVETE
REPUBLIKE SRBIJE

DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE

II SRPSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Kragujevac, 03. jun 2008.

I DAN

1. U trouglu ABC je $\measuredangle A = 120^\circ$, $AB = 3$ i $AC = 6$. Simetrala ugla A seče stranicu BC u tački D. Odredi dužinu duži AD.

2. Odredi najmanju sumu cifara broja oblika $3n^2 + n + 1$ za $n \in \mathbb{N}$.

3. Iz kvadrata 100×100 isečena su četiri polja koja obrazuju kvadrat 2×2.

(a) Dokazati da se preostali deo ne može popločati pravougaonicima 1×3 (svaki pravougaonik prekriva tri polja) ako je kvadrat 2×2 isečen u jednom uglu kvadrata 100×100.

(b) Dokazati da je popločavanje moguće ako je kvadrat 2×2 isečen iz centra kvadrata 100×100.

Rešenje svakog zadatka treba detaljno obrazložiti.
Svaki zadatak vredi 10 bodova.
Vreme za rad: 180 minuta.
Zabranjena je upotreba kalkulatora i mobilnih telefona.

MINISTARSTVO PROSVETE
REPUBLIKE SRBIJE

DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE

II SRPSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Kragujevac, 04. jun 2008.

II DAN

1. Odredi sve uredjene četvorke (x, y, z, t) prirodnih brojeva x, y, z i t tako da je

$$x + y = zt,$$
$$z + t = xy.$$

2. Brojeve 1, 2, $\ldots$, 2008 rasporedimo na 1004 domine, tako da se na svakoj domini nalaze tačno dva broja. Ako proizvode brojeva na dominama označimo sa p_1, $p_2, \ldots$, p_{1004}, dokazati nejednakost

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{1004}} \leqslant \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \ldots + \frac{1}{2008}.$$

3. U trouglu ABC stranica BC je najmanja. Na stranicama AB i AC date su redom tačke D i E takve da je $BD = CE = BC$. Dokazati da je poluprečnik kruga opisanog oko trougla ADE jednak rastojanju izmedju centra kruga opisanog oko trougla ABC i centra kruga upisanog u trougao ABC.

Rešenje svakog zadatka treba detaljno obrazložiti.
Svaki zadatak vredi 10 bodova.
Vreme za rad: 180 minuta.
Zabranjena je upotreba kalkulatora i mobilnih telefona.