ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2021/2022. ГОДИНЕ.

VII
РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ЗАДАЦИ

ДРЖАВНИ НИВО
09-10.04.2022.

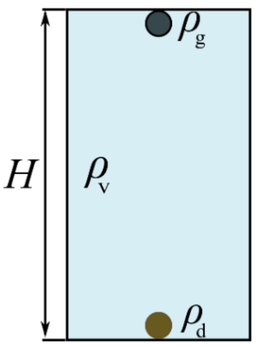
1. Куглица од гуме је причвршћена за врх суда висине $H = 1{,}8\ \mathrm{m}$ који је напуњен водом. Куглица од дрвета, која има исту запремину као куглица од гуме, причвршћена је за дно суда (слика 1). У истом тренутку куглице се пусте и могу да се слободно крећу једино у вертикалном правцу. На којој висини h у односу на дно суда ће се сударити? Густина воде је $\rho_{\mathrm{v}} = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, гуме $\rho_{\mathrm{g}} = 1100\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ и дрвета $\rho_{\mathrm{d}} = 800\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Димензије куглица су много мање од висине суда. Силе отпора занемарити.

2. Аутомобил у једном тренутку почне равномерно да успорава. Током девете и десете секунде пређе $6\ \mathrm{m}$ и заустави се. Колики пут аутомобил пређе у седмој секунди кретања?

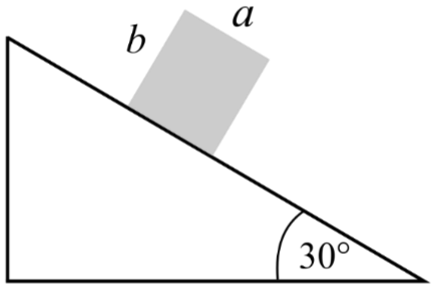
3. Са висине $H_1 = 46\ \mathrm{m}$ слободно пада камен. Истовремено је са висине $H_2 = 16\ \mathrm{m}$ бачен други камен вертикално навише. Коликом почетном брзином је бачен други камен ако ће се оба камена истовремено наћи на висини $h = 1\ \mathrm{m}$ изнад земље?

4. Хомоген квадар висине b и ширине a, налази се на стрмој равни нагибног угла $\alpha = 30°$ (слика 2). Колико износи минимални коефицијент трења μ, између квадра и стрме равни, при којем не долази до проклизавања квадра? Колики је максимални однос висине и ширине квадра $\frac{b}{a}$ при којем не долази до превртања квадра?

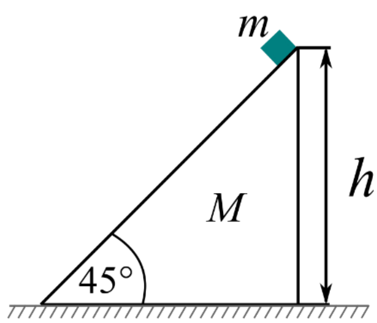
5. Глатка стрма раван висине h, масе M и нагибног угла $45°$ стоји на глаткој непокретној подлози (слика 3). На врху стрме равни налази се мало тело масе m. Систем се из стања мировања препусти самом себи. Познато је да, за време док се мало тело спусти до подножја стрме равни, стрма раван пређе пут $\frac{h}{3}$. Одредити однос маса $\frac{M}{m}$.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Сваки задатак носи 20 поена. Узети да је убрзање Земљине теже $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Задатке припремили: Михаило Ђорђевић и Бојана Бркић, Физички факултет, Београд
Рецензент: проф. др Иван Манчев, ПМФ, Ниш
Председник комисије: проф. др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд

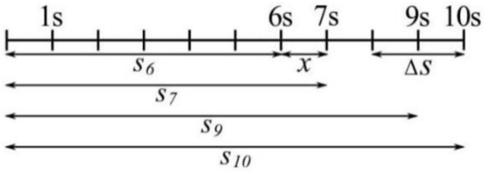
Свим такмичарима желимо успешан рад!

РЕШЕЊА

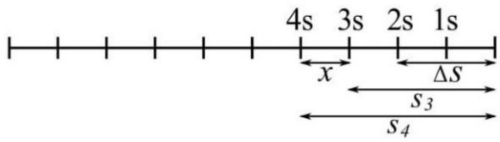
1. Како је $\rho_g > \rho_v > \rho_d$, након пуштања, куглица од гуме ће се кретати наниже, а куглица од дрвета навише. Једначине кретања куглица су $m_g a_g = m_g g - F_p$ **[2п]**, $m_d a_d = F_p - m_d g$ **[2п]**, где су масе $m_g = \rho_g V$ **[1п]** и $m_d = \rho_d V$ **[1п]**, а сила потиска $F_p = \rho_v V g$ **[1п]**. Сређивањем претходних једначина, добијају се интензитети убрзања $a_g = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_g}\right) = 0,919\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[3п]** и $a_d = \left(\frac{\rho_v}{\rho_d} - 1\right) = 2,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[3п]**. Збир пређених путева куглица једнак је висини суда $H = \frac{a_g t^2}{2} + \frac{a_d t^2}{2}$ **[2п]**, одакле се добија време које протекне до судара $t = \sqrt{\frac{2H}{a_g + a_d}} = 1\,\text{s}$ **[2п]**. Висина на којој ће се сударити је $h = \frac{a_d t^2}{2} = 1,25\,\text{m}$ **[2+1п]**.

2. I начин: Аутомобил почне да успорава и након $t_{10} = 10\,\text{s}$ се заустави, па је почетна брзина $v_0 = a t_{10}$ **[2п]**. За то време пређе пут $s_{10} = v_0 t_{10} - \frac{a t_{10}^2}{2} = \frac{a t_{10}^2}{2}$ **[2п]** (схематски приказано на слици 1а). За првих $t_8 = 8\,\text{s}$ пређе пут $s_8 = v_0 t_8 - \frac{a t_8^2}{2} = a t_{10} t_8 - \frac{a t_8^2}{2}$ **[2п]**. Познат је пут који пређе током девете и десете секунде $\Delta s = s_{10} - s_8$ **[2п]**, $\Delta s = \frac{a t_{10}^2}{2} - a t_{10} t_8 + \frac{a t_8^2}{2} = \frac{a}{2}(t_{10} - t_8)^2$ **[1п]**, па се одатле добија да је убрзање $a = \frac{2\Delta s}{(t_{10} - t_8)^2} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[2п]**. У седмој секунди пређе пут $x = s_7 - s_6$ **[2п]**, где је $s_7 = v_0 t_7 - \frac{a t_7^2}{2} = a t_{10} t_7 - \frac{a t_7^2}{2}$ **[2п]** пређени пут за $t_7 = 7\,\text{s}$ и $s_6 = v_0 t_6 - \frac{a t_6^2}{2} = a t_{10} t_6 - \frac{a t_6^2}{2}$ **[2п]** пређени пут за $t_6 = 6\,\text{s}$, па се добија $x = a t_{10}(t_7 - t_6) - \frac{a}{2}(t_7^2 - t_6^2) = 10,5\,\text{m}$ **[2+1п]**.

II начин: Кретање може инверзно да се посматра (схематски приказано на слици 1б). Аутомобил креће из мировања и за прве две секунде ($t_2 = 2\,\text{s}$) пређе пут $\Delta s = \frac{a t_2^2}{2}$ **[4п]**, одакле може да се израчуна његово убрзање $a = \frac{2\Delta s}{t_2^2} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[2п]**. За прве три секунде ($t_3 = 3\,\text{s}$) пређе пут $s_3 = \frac{a t_3^2}{2}$ **[4п]**, а за прве четири ($t_4 = 4\,\text{s}$) $s_4 = \frac{a t_4^2}{2}$ **[4п]**. Тражени пут у задатку је $x = s_4 - s_3$ **[3п]**, $x = \frac{a}{2}(t_4^2 - t_3^2) = 10,5\,\text{m}$ **[2+1п]**.



Слика 1а



Слика 1б

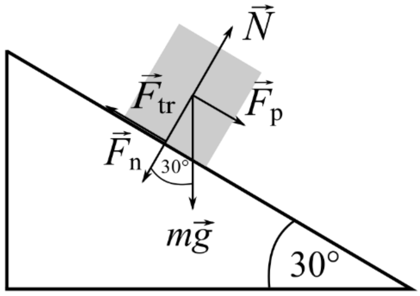
3. **I начин:** Време после ког ће се два камена срести на висини $h = 1\,\mathrm{m}$ може да се одреди из пређеног пута првог камена $H_1 - h = \frac{gt_1^2}{2}$ **[2п]**, одакле је $t_1 = \sqrt{\frac{2(H_1 - h)}{g}} = 3\,\mathrm{s}$ **[2п]**. Висина на којој се налази први камен у зависности од времена је $h_1 = H_1 - \frac{gt^2}{2}$ **[5п]**, а други $h_2 = H_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ **[5п]**. У тренутку сусрета $t_1 = 3\,\mathrm{s}$, висине су једнаке $h_1 = h_2$ **[2п]**, па се заменом израза за висине добија почетна брзина другог камена $v_0 = \frac{H_1 - H_2}{t_1} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **[3+1п].**

II начин: Први камен слободно пада са висине H и за његово кретање до места сусрета важи $H_1 - h = \frac{gt_1^2}{2}$ **[2п]**, одакле може да се нађе време до сусрета $t_1 = \sqrt{\frac{2(H_1 - h)}{g}} = 3\,\mathrm{s}$ **[2п]**. За хитац навише другог камена је $0 = v_0 - gt_2$, тј. $v_0 = gt_2$ **[2п]** и $h_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$ **[2п]**, тј. $h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$ **[1п]**. Други камен слободно пада са висине $H_2 + h_2$ и за његово кретање до места сусрета важи $H_2 + h_2 - h = \frac{gt_3^2}{2}$ **[2п]**. У овај израз се замени израз за h_2 и искористи веза између времена кретања $t_1 = t_2 + t_3$ **[2п]**, тако да је $H_2 - h = \frac{gt_3^2}{2} - h_2 = \frac{gt_3^2}{2} - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g((t_1 - t_2)^2 - t_2^2)}{2} = \frac{g(t_1 - t_2 - t_2)(t_1 - \cancel{t_2} + \cancel{t_2})}{2}$, одакле се добија да је $t_2 = \frac{1}{2}\left(t_1 - \frac{2(H_2 - h)}{gt_1}\right) = 1\,\mathrm{s}$ **[5п],** па је тражена почетна брзина $v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **[2п].**

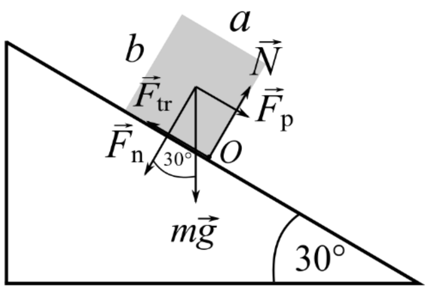
4. На квадар делују гравитациона сила, сила трења и сила реакције подлоге (слика 2а). Нормална компонента силе теже износи $F_\mathrm{n} = \frac{mg\sqrt{3}}{2}$ **[2п]**, а паралелна компонента износи $F_\mathrm{p} = \frac{mg}{2}$ **[2п]**. Пошто је квадар према услову задатка у равнотежи, збир свих сила које делују на квадар морају да буду једнаке нули. Одатле добијамо да је $N = F_\mathrm{n}$ **[1п]** и $F_\mathrm{tr} = F_\mathrm{p}$ **[1п]**. Како се у задатку тражи минимални коефицијент трења да би квадар мировао, сила трења има највећу могућу вредност тј. $F_\mathrm{tr} = \mu N$ **[1п]**, $F_\mathrm{tr} = \frac{\mu mg\sqrt{3}}{2}$ **[1п]**, одакле добијамо да је $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$ **[2п]**.

I начин (за други део задатка): Из услова равнотеже такође добијамо и да резултујући момент сила мора да буде једнак нули. Ако је квадар превисок за фиксну ширину, преврнуће се. Ако посматрамо максимални однос висине и ширине квадра при којем се квадар не преврће, као што се тражи у задатку, дакле непосредно пред превртање квадра, имамо да сила реакције подлоге мора да делује у тачки О (слика 2б). У том случају, ненулти момент у односу на тачку О имају само нормална и паралелна компонента силе теже. Они редом износе: $M_\mathrm{n} = F_\mathrm{n}\frac{a}{2}$ **[2п]** тј. $M_\mathrm{n} = \frac{mga\sqrt{3}}{4}$ **[1п]** и $M_\mathrm{p} = F_\mathrm{p}\frac{b}{2}$ **[2п]** тј. $M_\mathrm{p} = \frac{mgb}{4}$ **[1п]**. Из услова равнотеже добијамо $M_\mathrm{n} = M_\mathrm{p}$ **[2п]**, одакле следи $\frac{b}{a} = \sqrt{3} = 1,73$ **[2п].**

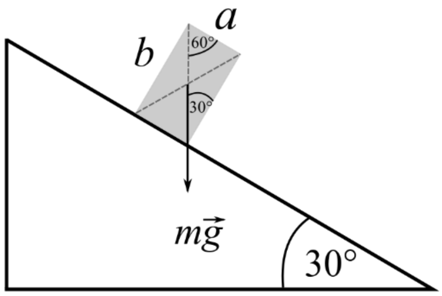
II начин (за други део задатка): Ако правац силе Земљине теже не пролази кроз основу квадра, он ће се преврнути. На слици 3 је приказана гранична ситуација (пре превртања). Са слике се види да је b висина једнакостраничног троугла странице $2a$, па је $b = 2a\frac{\sqrt{3}}{2}$ **[7п]**, одакле се добија тражени однос висине и ширине квадра $\frac{b}{a}=\sqrt{3}=1,73$ **[3п]**.



Слика 2а

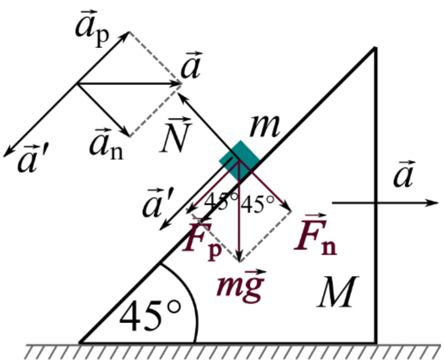


Слика 2б

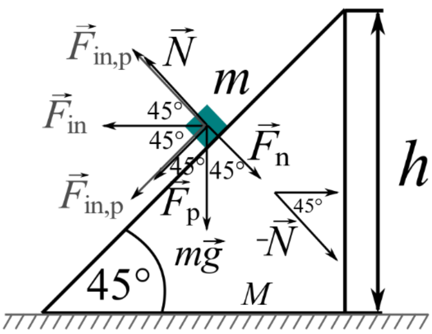


Слика 3

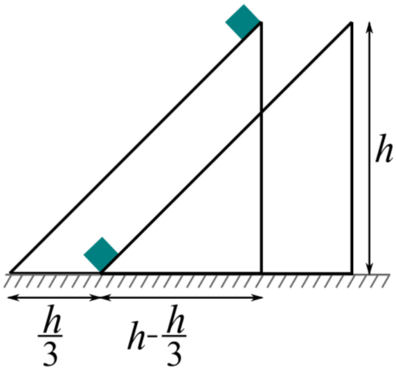
$\boxed{5.}$ **I начин:** Стрма раван има хоризонтално убрзање a усмерено ка десно, а једина хоризонтална сила која делује на стрму раван је компонента нормалне силе којом мало тело притиска стрму раван (слика 4а). Једначина кретања стрме равни дата је са $Ma=N\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[2п]**. У односу на стрму раван, мало тело има убрзање a' усмерено низ стрму раван. Укупно убрзање малог тела је векторски збир убрзања a и a'. Убрзање a разложићемо на правац паралелан стрмој равни и правац нормалан на стрму раван. Те компоненте износе $a_n=a_\mathrm{p}=a\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[1п]**. Паралелна и нормална компонента силе Земљине теже су $F_\mathrm{p}=F_\mathrm{n}=mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[1п]**. (**Напомена:** За тачно уцртане све силе дати **[1п]**.) Компонента укупног убрзања малог тела која је паралелна стрмој равни је $a'-a_\mathrm{p}$, а одговарајућа једначина кретања је $m(a'-a_\mathrm{p})=mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[2п]** одакле се добија $ma'=m\frac{\sqrt{2}}{2}(g+a)$ **[1п]**. Компонента укупног убрзања малог тела која је нормална на стрму раван је само $a_\mathrm{n}=a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Једначина кретања дуж тог правца је $ma_\mathrm{n}=mg\frac{\sqrt{2}}{2}-N$ **[2п]** одакле добијамо $N=m\frac{\sqrt{2}}{2}(g-a)$ **[1п]**. Заменом израза за нормалну силу у једначину кретања стрме равни добијамо да је убрзање стрме равни $a=\frac{m}{m+2M}g$ **[2п]**, а даљом заменом претходног израза у једначину кретања малог тела добијамо и убрзање малог тела у односу на стрму раван, односно $a'=\sqrt{2}\frac{m+M}{m+2M}g$ **[2п]**. Мало тело до подножја стрме равни прелази пут (у односу на стрму раван) $h\sqrt{2}$ **[1п]**, $h\sqrt{2}=\frac{a't^2}{2}$ **[1п]**, а стрма раван у односу на подлогу за исто време пређе $\frac{h}{3}=\frac{at^2}{2}$ **[1п]**. Дељењем ових једначина добија се однос убрзања $\frac{a'}{a}=3\sqrt{2}$ **[1п]**. Заменом добијених израза за убрзања, добија се тражени однос масе стрме равни и малог тела $\frac{M}{m}=2$ **[1п]**.



Слика 4а



Слика 4б

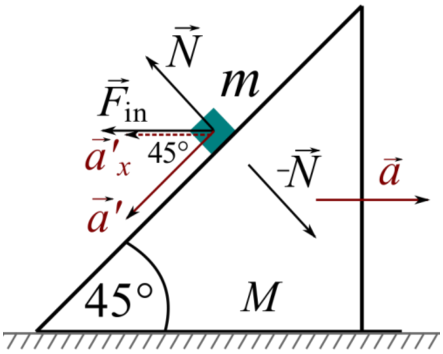


Слика 4в

II начин: Стрма раван има хоризонтално убрзање a усмерено ка десно, а једина хоризонтална сила која делује на стрму раван је компонента нормалне силе којом мало тело притиска стрму раван (слика 4б). Једначина кретања стрме равни дата је са $Ma = N\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[2п]**. Кретање малог тела посматраћемо у референтном систему везаном за стрму раван. Мало тело има убрзање a' усмерено низ стрму раван. Како се налазимо у неинерцијалном референтном систему, осим силе теже и силе реакције N, на мало тело делује и инерцијална сила $F_{\mathrm{in}} = ma$ усмерена супротно од убрзања стрме равни тј. налево (**Напомена:** За тачно уцртане све силе дати **[1п]**) . Паралелна и нормална компонента инрецијалне силе су $F_{\mathrm{in,p}} = F_{\mathrm{in,n}} = ma\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[1п]**, а силе Земљине теже $F_{\mathrm{p}} = F_{\mathrm{n}} = mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ **[1п]**. Једначина кретања за мало тело је тада $ma' = F_{\mathrm{p}} + F_{\mathrm{in,p}}$ **[2п],** $ma' = m\frac{\sqrt{2}}{2}\left(g + a\right)$ **[1п]**. Како мало тело нема убрзање дуж правца нормалног на стрму раван имамо и једначину $N + F_{\mathrm{in,n}} = F_{\mathrm{n}}$ **[2п]**, одакле можемо да изразимо нормалну силу $N = F_{\mathrm{n}} - F_{\mathrm{in,n}} = m\frac{\sqrt{2}}{2}(g - a)$ **[1п]**. Заменом овог израза у једначину кретања стрме равни и решавањем те једначине добијамо убрзање стрме равни $a = \frac{m}{m + 2M}g$ **[2п]**. Даљом заменом претходног израза у једначину кретања малог тела добијамо и убрзање малог тела у односу на стрму раван $a' = \sqrt{2}\frac{m + M}{m + 2M}g$ **[2п]**. Мало тело до подножја стрме равни прелази пут $h\sqrt{2}$ **[1п]**, $h\sqrt{2} = \frac{a't^2}{2}$ **[1п]**, а стрма раван за исто време пређе $\frac{h}{3} = \frac{at^2}{2}$ **[1п]**. Дељењем ових једначина добија се однос убрзања $\frac{a'}{a} = 3\sqrt{2}$ **[1п]**, па је однос масе стрме равни и малог тела $\frac{M}{m} = 2$ **[1п]**.

III начин: На систем (стрма раван – мало тело) не делују спољашње хоризонталне силе. Пошто је систем у почетку мировао, њихов центар масе не помера по хоризонтали (хоризонтална компонента импулса система је све време нула). Према поставци задатка, док мало тело не дође до подножја стрме равни, стрма раван се померила за $\frac{h}{3}$ удесно, а самим тим, у односу на свој почетни положај, мало тело се по хоризонтали померило за $h - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h$ **[5п]** (слика 4в). Као што је речено, њихов центар масе се није померио по хирозонтали што значи да помераји тела морају да се односе као њихове масе тј. $M\frac{h}{3} = m\frac{2}{3}h$ **[12п]**. Из претходног се скраћивањем добија $M = 2m$ **[3п]**, што је и тражено у задатку.

IV начин (по сугестији Пеђе Милошевића, професора гимназије у Параћину): Посматраћемо хоризонталне пројекције свих сила, као и хоризонталне пројекције убрзања оба тела. Хоризонтално, а уједно и укупно, убрзање стрме равни је a и оно је усмерено ка десно. Убрзање малог тела ћемо посматрати у односу на стрму раван и означићемо га са a'. Његова хоризонтална компонента износи $a'_{\mathrm{x}} = a'\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Дуж хоризонтале на мало тело делују инерцијална сила (видети II начин) и пројекција нормалне силе која потиче од стрме равни. На стрму раван дуж хоризонтале делује само компонента нормалне силе (слика 5). Једначина кретања за стрму раван је $Ma = N\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, док је једначина кретања за мало тело дуж хоризонталног правца $ma'_{\mathrm{x}} = ma'\dfrac{\sqrt{2}}{2} = F_{\mathrm{in}} + N\dfrac{\sqrt{2}}{2} = ma + Ma$. Из претходне једначине добијамо однос убрзања малог тела и стрме равни изражен преко односа маса, односно $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{2}$. Однос убрзања имамо из односа пређених путева тј. $\dfrac{a'}{a} = 3\sqrt{2}$ (видети претходне начине), одакле изједначавањем претходна два израза добијамо $\dfrac{m+M}{m}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, а даљим сређивањем и тражени однос маса $\dfrac{M}{m} = 2$. Приметимо да је овај начин решавања задатка суштински комбинација другог и трећег начина, при чему је само избегнуто експлицитно примењивање закона одржања импулса, али је свакако посматрано само кретање дуж хоризонтале. То нам је и омогућило заобилажење рачунања нормалне силе, а тиме и писања једначине кретања дуж правца нормалног на стрму раван.



Слика 5

Напомена: Бројне вредности код међурезултата који се не траже ученици не морају да израчунају.