VII РАЗРЕД

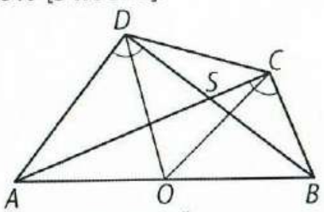
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 53-2**) Бројеви $9x$, $42y$ и $21z$ су дељиви са 3, па такав мора бити и $49t$. Како су 3 и 49 узајамно прости, то t мора бити дељив са 3 [**8 поена**]. Слично, бројеви $42y$, $21z$ и $49t$ су дељиви са 7, па такав мора бити и $9x$. Како су 7 и 9 узајамно прости, то је x дељив са 7 [**8 поена**]. Зато је производ xt дељив са $3 \cdot 7 = 21$ [**4 поена**].

2. *Прво решење*. Дати број, растављен на просте чиниоце, представља се као $2^{4038} \cdot 19^4$ [**4 поена**]. Његови делиоци који су четврти степен неког природног броја су облика: (а) 2^k, где је $k \in \{0, 1, 2, ..., 4038\}$ и $4 \mid k$ или (б) $2^k \cdot 19^4$, где k задовољава услове под (а). У оба ова скупа има по $1 + 4036 : 4 = 1010$ елемената [**8 поена**], па је укупан број делилаца наведеног облика $2 \cdot 1010 = 2020$ [**8 поена**]. [Ако такмичар(ка) изостави јединицу (тј. „заборави" случај $k = 0$), смањити добијени број поена за 2, односно укупно за 4].
Друго решење. Делиоци датог броја који су четврти степен природног броја су облика: (а) 4^k, где је $k \in \{0, 1, 2, ..., 2019\}$ и $2 \mid k$, или (б) $4^k \cdot 19^4$, где k задовољава исте услове. У оба ова скупа има по $1 + 2018 : 2 = 1010$ елемената [**10 поена**] па је укупан број делилаца наведеног облика $2 \cdot 1010 = 2020$ [**10 поена**] [Исти коментар ако се изостави јединица.]

3. Дата једнакост се може написати у облику $x^2y + 2019y - xy^2 - 2019x = 0$, односно $(x - y)(xy - 2019) = 0$ [**15 поена**]. Како је, по претпоставци, $x \neq y$, тј. $x - y \neq 0$, одатле следи да је $xy - 2019 = 0$, тј. $xy = 2019$ [**5 поена**].

4. Нека је O средиште странице AB датог четвороугла. Тежишне дужи DO и CO правоуглих троуглова ABD, односно ABC једнаке су половини хипотенузе AB, дакле, према претпоставци, страници CD, па је $\triangle OCD$ једнакостраничан [**7 поена**], а троуглови AOD и BOC су једнакокраки (са врхом O) [**6 поена**]. Даље се погодним „рачуном са угловима" налази да је тражени (туп) угао између дијагонала једнак 120° (односно оштар једнак 60°) [**7 поена**]. Једна од могућности је следећа: означимо углове код A и B датог четвороугла са α, односно β. Тада посматрајући углове са заједничким теменом O, добијамо да је $(180° - 2\alpha) + 60° + (180° - 2\beta) = 180°$, одакле је $\alpha + \beta = 120°$. С друге стране, из $\triangle ABS$ је $\measuredangle ASB = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 120°$.



5. Хоризонталних, односно вертикалних дужи дужине 5 има 6 (укупно 12) [**6 поена**]. Преостале такве дужи су дијагонале правоугаоника димензија 3×4 (односно 4×3). Од обе врсте има по 6 таквих правоугаоника, дакле укупно 12 [**8 поена**]. Укупан број дужи дужине 5 је $12 + 2 \cdot 12 = 36$ [**6 поена**]. [Уместо правоугаоника могу се пребројати правоугли троуглови са катетама дужине 3 и 4, са истим резултатом и аналогним бодовањем.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
23.03.2019.

VII разред

1. Ако за целе бројеве x, y, z, t важи $9x - 42y = 21z - 49t$, доказати да је производ xt дељив са 21.

2. Колико делилаца броја $4^{2019} \cdot 19^4$ је једнако четвртом степену неког природног броја?

3. Нека су x и y различити реални бројеви, такви да је
$$y(x^2 + 2019) = x(y^2 + 2019).$$
Израчунај вредност производа xy.

4. Страница AB конвексног четвороугла $ABCD$ је два пута дужа од њој наспрамне странице CD. Дијагонала BD нормална је на страницу AD, а дијагонала AC нормална је на страницу BC. Одреди угао између дијагонала датог четвороугла.

5. Хоризонтално и вертикално растојање између две суседне тачке на слици је 1. Колико има дужи дужине 5 са крајевима у датим тачкама?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.