Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
07.03.2020.

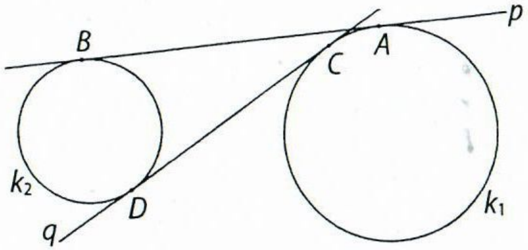
VII разред

1. Да ли постоје природни бројеви x, y и z, такви да је $4^x + 9^y = 11^z$? Образложи одговор.

2. Колико има петоцифрених природних бројева у чијем запису се појављује бар једна парна и бар једна непарна цифра?

3. Из скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ бирају се три различита броја p, q и r. На колико начина се може постићи да број $p^{\left(q^r\right)}$ буде дељив са 8?

4. Права p додирује кругове k_1 и k_2 у тачкама A и B, а права q у тачкама C и D (види слику). Ако је полупречник круга k_1 једнак 3 cm, а полупречник круга k_2 једнак 2 cm, одреди вредност израза $AB^2 - CD^2$.



5. У правоуглом троуглу ABC, са правим углом у темену C, важи $BC = 3AC$. Нека су M и N тачке катете BC такве да је $BM = MN = NC$ и K средиште хипотенузе AB. Израчунај меру угла MKN.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

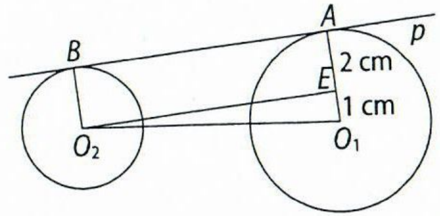
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

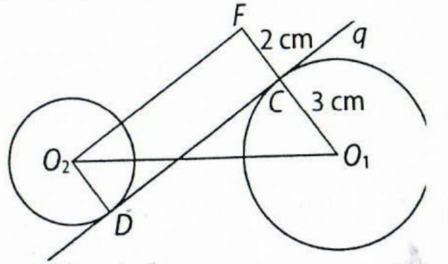
1. Бројеви облика 4^x завршавају се цифром 4 или 6 [**4 поена**], бројеви облика 9^y цифрама 9 или 1 [**4 поена**], а бројеви облика 11^z цифром 1 [**4 поена**]. Дакле, збир $4^x + 9^y$ може се завршавати неком од цифара 3, 5 или 7 [**4 поена**] и не може бити једнак 11^z [**4 поена**].

2. Од укупног броја петоцифрених бројева одузећемо оне које у запису имају само парне и само непарне цифре. Укупно има 90 000 петоцифрених бројева [**2 поена**]. Петоцифрених бројева чије су све цифре парне има $4 \cdot 5^4 = 2\,500$ [**6 поена**], а чије су све цифре непарне $5^5 = 3\,125$ [**6 поена**]. Бројева у чијем запису је јавља бар једна парна и бар једна непарна цифра има $90\,000 - 2\,500 - 3\,125 = 84\,375$ [**6 поена**].

3. (**МЛ 53/5**) Да би број $p^{\left(q^r\right)}$ био дељив са 8 неопходно је да буде $p = 2$ [**4 поена**] или $p = 4$ [**4 поена**]. У оба случаја бројеви q и r се од преостала три броја скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ могу изабрати на $2 \cdot 3 = 6$ начина [**8 поена**]. Дакле, укупан број тражених бројева је $6 + 6 = 12$ [**4 поена**].

4. У I случају (слика лево) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1E налазимо $AB^2 = O_2E^2 = O_1O_2^2 - 1^2$ [**6 поена**]. У II случају (слика десно) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1F налазимо $CD^2 = O_2F^2 = O_1O_2^2 - 5^2$ [**6 поена**]. $AB^2 - CD^2 = 24\text{ cm}^2$ [**8 поена**].





5. Нека је тачка L средиште дужи BC. Тада је дуж KL средња линија троугла BCA, па је $KL \perp BC$ и $KL = \frac{1}{2}AC = ML = LN$ [**10 поена**]. Дакле, троуглови LMK и LNK су једнакокрако-правоугли, па је $\measuredangle MKL = \measuredangle NKL = 45°$ [**5 поена**] $\measuredangle MKN = 90°$ [**5 поена**].