VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. **(МЛ 53-2)** а) $n = 4$ [**10 поена**];

   б) $\frac{3^{12}\cdot 9^{11} : 27^{10}}{3^n} = \frac{3^{12}\cdot 3^{22} : 3^{30}}{3^n} = 3^{4-n} = 3$ за $4 - n = 1$, тј. $n = 3$ [**10 поена**].

2. **(МЛ 53-2)** За $x = 1$ је $a = \sqrt{66 - \sqrt{2}}$, а за $x = 2$ је $a = \sqrt{66 - \sqrt{3}}$, што нису природни бројеви. За $x = 3$ је $a = \sqrt{64} = 8$, па је $x = 3$ најмања од тражених вредности [**10 поена**]. Највеће x се добија када је $\sqrt{x+1} = 65$, тј. $x = 4224$, у ком случају је $a = 1$ [**10 поена**].

3. Разломци у изразу су редом једнаки $x^4, x^5, x^6, \ldots$ Ако је последњи од њих x^n, онда је вредност израза $x^{4+5+\ldots+n}$, што је једнако x^{2010} ако је $4 + 5 + \ldots + n = 2010$ [**8 поена**]. Познатим поступком се добија да је $4 + 5 + \ldots + n = (1 + 2 + \ldots + n) - 6 = \frac{n(n+1)}{2} - 6$, па се последња једнакост своди на $\frac{n(n+1)}{2} - 6 = 2010$ [**6 поена**], односно $n(n + 1) = 4032$, што је испуње-но за $n = 63$ [**5 поена**]. Број разломака у изразу је $63 - 3 = 60$ [**1 поен**].

4. Означимо висину трапеза $ABB'A'$ из темена A' са x, а висину трапеза $BCC'B'$ из темена B' са y. Тада је висина трапеза $CDD'C'$ из темена D' једнака $4 - x$, а висина трапеза $ADD'A'$ из темена A' једнака $6 - y$ [**8 поена**]. Зато је $P_{ABB'A'} + P_{CDD'C'} = \frac{10+4}{2}x + \frac{10+4}{2}(4 - x) = 28$, $P_{BCC'B'} + P_{ADD'A'} = \frac{7+3}{2}y + \frac{7+3}{2}(6 - y) = 30$ [**12 поена**], па је други збир већи од првог.

5. Те четвороуглове можемо поделити у две групе:
   1°) они који имају по два темена на две од три странице троугла;
   2°) они који имају два темена на једној страници и по једно теме на свакој од друге две странице [**4 поена**].
   У првој групи, странице на којима су два темена можемо изабрати на 3 начина, а затим на свакој од њих 2 темена на 6 начина, па троуглова у овој групи има $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ [**8 поена**]. У другој групи, страницу на којој су два темена можемо изабрати на 3 начина и на њој та два темена на 6 начина; даље, на свакој од преостале две странице можемо једно теме изабрати на 4 начина. Број четвороуглова у другој групи је $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 288$ [**8 поена**]. Укупан број четвороуглова је $108 + 288 = 396$.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
02.03.2019.

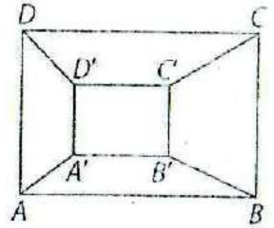
VII разред

1. Одреди природан број n тако да важи:
   а) $\frac{3\cdot 5^9 + 2\cdot 5^9}{5^6} = 5^n$; б) $\frac{3^{12}\cdot 9^{11} : 27^{10}}{3^n} = 3$.

2. Одреди најмањи и највећи природан број x за који је број $a = \sqrt{66 - \sqrt{x+1}}$ такође природан.

3. Колико треба да буде разломака у изразу
   $$\frac{x^2\cdot x^3}{x}\cdot\frac{x^3\cdot x^4}{x^2}\cdot\frac{x^4\cdot x^5}{x^3}\cdots$$
   да би његова вредност била x^{2010}?

4. У унутрашњости правоугаоника $ABCD$ смештен је правоугаоник $A'B'C'D'$ чије су странице паралелне страницама правоугаоника $ABCD$ (види слику). Ако је $AB = 10\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $A'B' = 4\text{cm}$ и $B'C' = 3\text{cm}$, одреди шта је веће – збир површина трапеза $ABB'A'$ и $CDD'C'$ или збир површина трапеза $ADD'A'$ и $BCC'B'$.



5. Дат је троугао и на свакој од његових страница изабране су четири тачке, различите од темена троугла. Колико има четвороуглова чија су темена неке од 12 изабраних тачака?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.