Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

VII разред

1. Упореди вредност израза $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}$ и број $\sqrt{\dfrac{79}{25}}$.

2. Шеснаест радника је за 5 дана завршило $\dfrac{4}{9}$ неког посла. Колико радника треба још ангажовати да би преостали део посла, радећи истим темпом, завршили за 4 дана?

3. У једнакокракоправоугли троугао ABC са катетама $AC = BC = 1$ cm уписана је полукружница k са центром O на катети AC. Ова полукружница садржи теме C и додирује хипотенузу AB. Одреди дужину полупречника r ове полукружнице.

4. У трапезу $ABCD$ краци су $AD = 3$ cm и $BC = 4$ cm, краћа основица $DC = 4$ cm и дијагонала $AC = 4$ cm. Одреди дужину дијагонале BD.

5. На полицу треба распоредити девет различитих књига означених бројевима од 1 до 9. На колико начина је то могуће да се уради тако да:
а) књига 1 и књига 2 буду једна до друге?
б) књига 1 и књига 2 не буду једна до друге?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

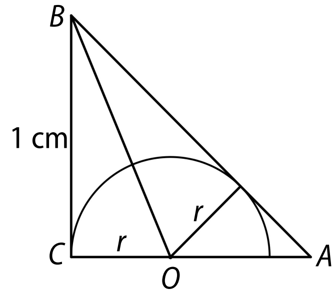
VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

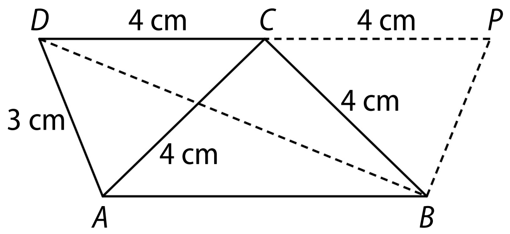
1. (**МЛ 55/2**) $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}=\dfrac{9}{4}$ [**8 поена**]. Како је $\dfrac{81}{16}>\dfrac{79}{25}$ (јер је 2025 $= 81\cdot 25 > 16\cdot 79 = 1264$), то је $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}>\sqrt{\dfrac{79}{25}}$ [**12 поена**].

2. 16 радника је за један дан урадило $\dfrac{4}{45}$ посла [**3 поена**]. Да би радници за 4 дана завршили $\dfrac{5}{9}$ посла, они дневно треба да ураде $\dfrac{5}{36}$ посла [**3 поена**]. Ако са x означимо број радника потребних да се посао заврши за 4 дана, онда важи $16 : x = \dfrac{4}{45} : \dfrac{5}{36}$ [**8 поена**], одакле је $x = 25$ [**4 поена**]. Дакле, потребно је ангажовати још $25 - 16 = 9$ радника [**2 поена**].

3. Могу се изразити површине троуглова AOB, OCB и ACB: $P_{\Delta AOB} = \dfrac{AB\cdot r}{2}=\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ [**3 поена**], $P_{\Delta OCB}=\dfrac{r}{2}$ [**3 поена**], $P_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}$ [**3 поена**]. Како је $P_{\Delta AOB} + P_{\Delta OCB} = P_{\Delta ABC}$, следи да је $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}+\dfrac{r}{2}=\dfrac{1}{2}$ [**8 поена**], тј. $r=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\text{ cm}=(\sqrt{2}-1)\text{ cm}$ [**3 поена**].



4. Нека је P тачка праве DC таква да је $CP = 4$ cm. Тада је $CP = CB$ и $CD = CB$, па су троуглови BCD и BCP једнакокраки и $\measuredangle CBP = \measuredangle CPB$ и $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD$, па је $\measuredangle DBP = \measuredangle DBC + \measuredangle CBP = \frac{\measuredangle BCP}{2} + \frac{\measuredangle BCD}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ [**8 поена**]. Из подударности троуглова DAC и PBC може се закључити да је $PB = 3$ cm [**5 поена**]. По Питагориној теореми налазимо да је $DB = \sqrt{DP^2 - PB^2} = \sqrt{55}$ cm [**7 поена**].



5. а) Књиге 1 и 2 посматрајмо као једну. Преосталих седам књига и ова (1, 2) могу се распоредити на $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина [**6 поена**]. Како се књиге 1 и 2 могу распоредити на 2 начина, укупан број начина је $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ [**4 поена**].
б) Свих 9 књига могу се распоредити на $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина [**4 поена**]. Ако од овог броја одузмемо број распореда када су књиге 1 и 2 суседне, добијамо број распореда када књиге 1 и 2 нису суседне: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ [**6 поена**].
Напомена: Не очекује се од ученика да израчунају вредности израза 9! и 8!, као ни израза у којима они учествују.