ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
20.02.2022.

VIII разред

1. Тачке A и B налазе се са разних страна равни α. Тачка A је од равни α удаљена 4 cm. Тачка B је од равни α удаљена 8 cm. Израчунај дужину дужи AB, ако је дужина њене ортогоналне пројекције на раван α једнака 9 cm.

2. У равни је дато 8 тачака, међу којима су тачно четири тројке колинеарних тачака. Колико правих одређују ове тачке?

3. Одреди реалан број a тако да једначине

$$x\cdot\left(2a-\frac{2}{3}\right)=a-\frac{x}{3}+4 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)=x-\frac{x+1}{2}$$

буду еквивалентне.

4. Одреди збир свих решења једначине

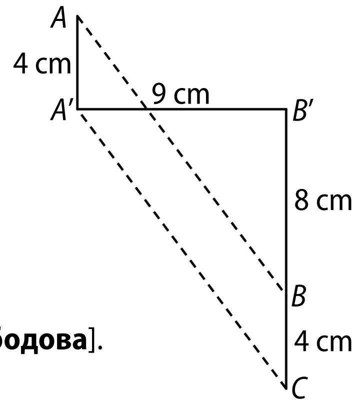
$$\left|\left|x-\sqrt{5}\right|-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}.$$

5. У троугао ABC је уписан круг. Тангента тог круга паралелна са страницом AB сече странице BC и AC у тачкама M и N. Одреди дужину дужи MN ако су дужине страница троугла ABC: $AB=14\text{cm}$, $BC=13\text{cm}$ и $CA=15\text{cm}$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.



1. (**МЛ 55/2**) Означимо ортогоналне пројекције тачака A и B на раван α са A' и B', редом. Нека је C тачка праве BB′ таква да је $BC = 4$ cm и $A'CBA$ је паралелограм. Тада је $AB = AC'$ [**10 бодова**]. Применом Питагорине теореме налазимо $A'C = \sqrt{A'B'^2 + B'C^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm [**10 бодова**].

2. (**МЛ 55/2**) Када не би постојала ни једна тројка колинеарних тачака, број правих које одређују 8 тачака би био $(8 \cdot 7) : 2 = 28$ [**5 бодова**]. Овај број треба умањити за $4 \cdot 2 = 8$ јер свака од 4 тројки колинеарних тачака одређује једну, а не три праве [**10 бодова**]. Дакле, тражени број правих је $28 - 8 = 20$ [**5 бодова**].

3. Решење једначине $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - x\right) = x - \frac{x+1}{2}$ је број $\frac{3}{4}$ [**6 бодова**], па ће једначине да буду еквивалентне ако је $\frac{3}{4}\cdot\left(2a - \frac{2}{3}\right) = a - \frac{1}{4} + 4$ [**8 бодова**], одакле се добија $a = \frac{17}{2}$ [**6 бодова**].

4. Добија се $\left|x - \sqrt{5}\right| - \sqrt{2} = \sqrt{5}$ или $\left|x - \sqrt{5}\right| - \sqrt{2} = -\sqrt{5}$ [**5 бодова**]. У првом случају је $\left|x - \sqrt{5}\right| = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ одакле је $x - \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ или $x - \sqrt{5} = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$, тј. $x = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ или $x = -\sqrt{2}$ [**8 бодова**]. У другом случају је $\left|x - \sqrt{5}\right| = \sqrt{2} - \sqrt{5} < 0$, па у овом случају нема решења [**5 бодова**]. Дакле, једначина има два решења: $x_1 = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. Тражени збир је $\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$ [**2 бодова**].

5. Користећи Херонов образац (или на неки други начин), добијамо да је површина троугла ABC једнака 84 cm^2 [**4 бода**]. Висину CD троугла ABC, која одговара страници AB, добијамо из површине троугла $CD = \frac{2P}{AB} = 12$ cm [**4 бода**]. Означимо полупречник уписаног круга са r. Како је површина троугла ABC једнака $P = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2}$ добијамо да је $r = 4$ cm [**4 бода**]. Сада је висина CE троугла NMC једнака $CE = CD - DE = CD - 2r = 4$ cm [**4 бода**]. Из сличности троуглова ABC и NMC имамо да је $AB : NM = CD : CE$, одакле је $NM = \frac{14}{3}$ cm [**4 бода**].